Equations aux dérivées partielles: approches variationnelles

Examen du 5 juin 2023 – Eléments de correction

1 Exercice: le bilaplacien

Question 1. On a

$$\|u\|_V^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i,j=1}^d \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Question 2. On calcule que

$$|a(u,v)| \leq \sum_{i,j=1}^d \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq d^2 \|u\|_V \|v\|_V .$$

Par ailleurs,

$$|b(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V .$$

Question 3. Soit $g \in V$. On utilise une formule d'intégration par partie:

$$\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_i} = \int_{\partial\Omega} g\, n_i = 0,$$

où la dernière égalité vient du fait que g est nulle sur le bord. On écrit l'inégalité de Poincaré–Wirtinger pour $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$:

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \left\| \nabla \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} .$$

Question 4. En utilisant la question précédente, on a donc

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \left| \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right|^2 \geq \frac{1}{C_\Omega^2} \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{C_\Omega^2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Puisque $u \in H_0^1(\Omega)$, on peut utiliser l'inégalité de Poincaré dans la relation précédente, ce qui implique que

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 \geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 ,$$

pour un certain $\alpha > 0$. En sommant les inégalités, on obtient donc

$$3 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 \geq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 + \frac{1}{C_\Omega^2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \gamma \|u\|_V^2$$

pour $\gamma = \min(1, 1/C_\Omega^2, \alpha) > 0$. On obtient donc l'inégalité demandée avec $\beta = 3/\gamma$.

Question 5. L'inégalité montrée en Question 4 est exactement $a(u,u) \geq \beta^{-1} \|u\|_V^2$, d'où la coercivité de la forme bilinéaire a sur V.

Question 6. Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées.

Question 7. On choisit $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$ dans la formulation variationnelle, ce qui donne

$$\sum_{i,j=1}^{d} \langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \rangle = \langle f, v \rangle$$

et donc

$$\sum_{i,j=1}^{d} \langle \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}, v \rangle = \langle f, v \rangle.$$

Ceci étant vrai pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient que $\Delta\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2 Problème: une EDP nonlinéaire

2.1 Préliminaires

Question 1. Soit u_n une suite de Cauchy dans V. Par définition de la norme $\|\cdot\|_V$, on voit donc que u_n est de Cauchy dans $L^4(\Omega)$, ainsi que $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Puis que $L^4(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}$, on a donc que u_n (resp. $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$) converge dans $L^4(\Omega)$ vers un certain v (resp. v_i) qui est dans $L^4(\Omega)$. La convergence dans $L^4(\Omega)$ implique la convergence au sens des distributions, donc u_n (resp. $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$) converge au sens des distributions vers v (resp. v_i). La convergence au sens des distributions se dérive, donc $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$ converge au sens des distributions vers $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on obtient ainsi que $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = v_i$, ce qui donne que $v \in V$ et que u_n converge vers v au sens de la norme $\|\cdot\|_V$.

Question 2. V_0 est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_V$ car il est fermé dans V.

Question 3. On insère l'ouvert borné Ω dans le pavé $(-L, L)^d$. Soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, qu'on peut prolonger par zero sur $(-L, L)^d \setminus \Omega$. On écrit

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_d) = u(-L, x_2, \cdots, x_d) + \int_{-L}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2, \cdots, x_d)\, dt$$

et puisque $u(-L, x_2, \cdots, x_d) = 0$, ceci donne

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \int_{-L}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2, \cdots, x_d)\, dt.$$

On utilise l'inégalité de Hölder avec des exposants p et q à déterminer plus tard:

$$\begin{aligned} |u(x_1, x_2, \cdots, x_d)| &\leq \|1\|_{L^p(-L,x_1)} \|\partial_1 u(\cdot, x_2, \cdots, x_d)\|_{L^q(-L,x_1)} \\ &\leq \|1\|_{L^p(-L,L)} \|\partial_1 u(\cdot, x_2, \cdots, x_d)\|_{L^q(-L,L)}, \end{aligned}$$

d'où

$$|u(x_1, x_2, \cdots, x_d)|^4 \leq \|1\|^4_{L^p(-L,L)} \|\partial_1 u(\cdot, x_2, \cdots, x_d)\|^4_{L^q(-L,L)}.$$

Il apparait donc judicieux de choisir $q = 4$ (et donc $p = 4/3$), ce qui donne

$$|u(x_1, x_2, \cdots, x_d)|^4 \leq C_L \|\partial_1 u(\cdot, x_2, \cdots, x_d)\|^4_{L^4(-L,L)} = C_L \int_{-L}^{L} (\partial_1 u(t, x_2, \cdots, x_d))^4\, dt.$$

On intègre maintenant par rapport à $x_1, \cdots, x_d$, en notant que le membre de droite ne dépend pas de x_1:

$$\int_{(-L,L)^d} u^4 \leq 2\,L\,C_L \int_{(-L,L)^d} (\partial_1 u)^4 \leq 2\,L\,C_L \sum_{i=1}^{d} \int_{(-L,L)^d} (\partial_i u)^4 = 2\,L\,C_L\, \|\nabla u\|^4_{L^4((-L,L)^d)}.$$

Puisque u et ∇u sont nuls en dehors de Ω, on obtient l'inégalité de Poincaré souhaitée.

Question 4. On a

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} = \|(u-v)+v\|_{L^4(\Omega)} \leq \|v\|_{L^4(\Omega)} + \|u-v\|_{L^4(\Omega)},$$

donc

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} - \|v\|_{L^4(\Omega)} \leq \|u-v\|_{L^4(\Omega)}.$$

En interchangeant u et v, on a

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} - \|u\|_{L^4(\Omega)} \leq \|u-v\|_{L^4(\Omega)}.$$

Les deux inégalités impliquent $\Big|\|u\|_{L^4(\Omega)} - \|v\|_{L^4(\Omega)}\Big| \leq \|u-v\|_{L^4(\Omega)} \leq \|u-v\|_V$. La fonction $u \in V \mapsto \|u\|_{L^4(\Omega)}$ est donc continue, de même que la fonction $u \in V \mapsto \|\nabla u\|_{L^4(\Omega)}$. On utilise alors l'inégalité montrée à la Question 3 et la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V_0 pour conclure.

Question 5. En utilisant les indications, on calcule que

$$\int_\Omega |\nabla u|^4 = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{d} (\partial_i u)^2\right)^2 \leq d \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} (\partial_i u)^4 = d\,\|\nabla u\|^4_{L^4(\Omega)}.$$

2.2 EDP nonlinéaire

Question 6. Soit $u \in V$ et $1 \leq i \leq d$. On voit que

$$\left| |\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leq |\nabla u|^3,$$

donc

$$\int_\Omega \left| |\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{4/3} \leq \int_\Omega |\nabla u|^4 \leq d\,\|\nabla u\|^4_{L^4(\Omega)} < \infty,$$

où on a utilisé le résultat de la Question 5. Donc $|\nabla u|^2 \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est dans $L^{4/3}(\Omega)$, et on peut donc lui associer naturellement une distribution, qu'on peut ensuite dériver pour former le membre de gauche de l'EDP.

Question 7. Soit $v \in V$. On a $v \in L^4(\Omega)$ et $f \in L^{4/3}(\Omega)$. On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder qui indique que $f\,v$ est dans $L^1(\Omega)$, ce qui donne un sens à $b(v)$. L'application $v \mapsto b(v)$ est bien sur linéaire, et on calcule que

$$|b(v)| \leq \|f\|_{L^{4/3}(\Omega)}\, \|v\|_{L^4(\Omega)} \leq C\,\|v\|_V,$$

ce qui implique la continuité de b.

Question 8. On a montré en Question 6 que $|\nabla u|^2 \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est dans $L^{4/3}(\Omega)$. Puisque $v \in V$, on sait que $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est dans $L^4(\Omega)$. Donc le produit $|\nabla u|^2 \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est intégrable, ce qui donne un sens à $a(u,v)$. L'application $v \mapsto a(u,v)$ est bien sur linéaire, et on calcule que

$$|a(u,v)| \leq \sum_{i=1}^d \left\| |\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^{4/3}(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^4(\Omega)} \leq C \, \|v\|_V,$$

ce qui implique la continuité de $v \mapsto a(u,v)$. Bien sur, l'application $u \mapsto a(u,v)$ n'est pas linéaire.

Question 9. On suppose que u est solution de la formulation variationnelle. On peut tester contre $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V_0$, ce qui donne

$$\sum_{i=1}^d \int_\Omega |\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_\Omega f \, v$$

et donc

$$\sum_{i=1}^d \langle |\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle = \langle f, v \rangle$$

et ainsi

$$-\sum_{i=1}^d \langle \partial_i \left[|\nabla u|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right], v \rangle = \langle f, v \rangle$$

ce qui est exactement l'EDP (au sens des distributions).

Réciproquement, si l'EDP (au sens des distributions) est vérifiée, alors on a $a(u,v) = b(v)$ pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, en utilisant les mêmes calculs que ci-dessus. La densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V_0 et la continuité des applications $v \mapsto b(v)$ et $v \mapsto a(u,v)$ montrée aux questions précedentes permet de conclure.

Question 10. On ne peut pas utiliser le théorème de Lax-Milgram, puisque $u \mapsto a(u,v)$ n'est pas linéaire (on n'a pas non plus montré de coercivité pour a et V_0 n'est pas un espace de Hilbert).

2.3 Introduction d'une énergie

Question 11. Le second terme est bien défini grace à la Question 7. Le premier terme est bien défini grace à la Question 5.

Question 12. Soit $v \in V$ et $1 \leq j \leq d$. On voit que

$$(\partial_j v)^2 \leq \sum_{i=1}^d (\partial_i v)^2 = |\nabla v|^2,$$

donc, en passant au carré, on obtient $(\partial_j v)^4 \leq |\nabla v|^4$. On somme sur les j et on intègre sur Ω pour obtenir le résultat.

Question 13. On a vu à la Question 7 que $\left| \int_\Omega f \, v \right| \leq C \, \|v\|_V$ pour tout $v \in V$, donc $-\int_\Omega f \, v \geq -C \, \|v\|_V$. On a par ailleurs, en utilisant la question précédente, que

$$\int_\Omega |\nabla v|^4 \geq \frac{1}{d} \|\nabla v\|^4_{L^4(\Omega)} = \frac{1}{2d} \|\nabla v\|^4_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2d} \|\nabla v\|^4_{L^4(\Omega)},$$

puis, en utilisant la Question 4 (puisque $v \in V_0$), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla v|^4 \geq \frac{1}{2d} \|\nabla v\|^4_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2\,d\,C_P^4} \|v\|^4_{L^4(\Omega)} \geq \mu \left(\|\nabla v\|^4_{L^4(\Omega)} + \|v\|^4_{L^4(\Omega)} \right) = \overline{\mu}\, \|v\|^4_V,$$

avec $\overline{\mu} = \min \left(\dfrac{1}{2d}, \dfrac{1}{2\,d\,C_P^4} \right)$. On obtient ainsi

$$J(v) \geq \frac{\overline{\mu}}{4} \|v\|^4_V - C\, \|v\|_V.$$

On en déduit immédiatement que $\lim\limits_{\|v\|_V \to \infty} J(v) = \infty$.

Question 14. Soit u et v dans V_0. On calcule que

$$\begin{aligned}
&|\nabla u + \nabla v|^4 \\
&= \Big[(\nabla u + \nabla v) \cdot (\nabla u + \nabla v) \Big]^2 \\
&= \Big[|\nabla u|^2 + 2\, \nabla u \cdot \nabla v + |\nabla v|^2 \Big]^2 \\
&= |\nabla u|^4 + 4\,(\nabla u \cdot \nabla v)^2 + |\nabla v|^4 + 4\,(\nabla u \cdot \nabla v)\, |\nabla u|^2 + 2\, |\nabla u|^2\, |\nabla v|^2 + 4\,(\nabla u \cdot \nabla v)\, |\nabla v|^2.
\end{aligned}$$

Question 15. Soit u et v dans V_0. On obtient ainsi que

$$J(u+v) = J(u) + L_u(v) + R_u(v),$$

avec

$$L_u(v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)\, |\nabla u|^2 - \int_\Omega f\, v$$

et

$$R_u(v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)^2 + \frac{1}{4} |\nabla v|^4 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2\, |\nabla v|^2 + (\nabla u \cdot \nabla v)\, |\nabla v|^2.$$

On constate que $L_u(v) = a(u,v) - b(v)$, ce qui permet de dire (en utilisant les Questions 7 et 8) que $v \mapsto L_u(v)$ est linéaire et continue sur V.

On calcule ensuite que

$$\begin{aligned}
|R_u(v)| &\leq \frac{3}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, |\nabla v|^2 + \frac{1}{4} \int_\Omega |\nabla v|^4 + \int_\Omega |\nabla u|\, |\nabla v|^3 \\
&\leq \frac{3}{2} \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^4}\, \sqrt{\int_\Omega |\nabla v|^4} + \frac{1}{4} \int_\Omega |\nabla v|^4 + \|\, |\nabla u|\, \|_{L^4(\Omega)}\, \|\, |\nabla v|^3\, \|_{L^{4/3}(\Omega)},
\end{aligned}$$

où on a utilisé à la seconde ligne l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Hölder. On sait que $\|\, |\nabla u|\, \|^4_{L^4(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^4$ est fini grace à la Question 5. On obtient donc

$$\begin{aligned}
|R_u(v)| &\leq C \sqrt{\int_\Omega |\nabla v|^4} + \frac{1}{4} \int_\Omega |\nabla v|^4 + C \left(\int_\Omega |\nabla v|^4 \right)^{3/4} \\
&\leq C\, \|\nabla v\|^2_{L^4(\Omega)} + C\, \|\nabla v\|^4_{L^4(\Omega)} + C\, \|\nabla v\|^3_{L^4(\Omega)} \\
&\leq C\, \|v\|^2_V + C\, \|v\|^4_V + C\, \|v\|^3_V,
\end{aligned}$$

où on a utilisé la Question 5 à la seconde ligne. On a donc bien que $R_u(v) = o(\|v\|_V)$, ce qui montre bien que J est différentiable sur V_0 et que sa différentielle est l'application $v \mapsto L_u(v)$ introduite ci-dessus.

Question 16. Soit $u \in V_0$. La relation $J(u+v) = J(u) + L_u(v) + R_u(v)$, la continuité de $v \mapsto L_u(v)$ et le fait que $R_u(v) = o(\|v\|_V)$ impliquent que J est continue en u.

Question 17. Soit u et v dans V_0, et soit $\lambda \in [0,1]$. On calcule

$$\begin{aligned} J(\lambda u + (1-\lambda)v) &= \frac{1}{4}\int_\Omega |\lambda \nabla u + (1-\lambda)\nabla v|^4 - \lambda \int_\Omega f\,u - (1-\lambda)\int_\Omega f\,v \\ &\le \frac{\lambda}{4}\int_\Omega |\nabla u|^4 + \frac{1-\lambda}{4}\int_\Omega |\nabla v|^4 - \lambda \int_\Omega f\,u - (1-\lambda)\int_\Omega f\,v \\ &= \lambda\, J(u) + (1-\lambda)\, J(v), \end{aligned}$$

où on a utilisé la convexité de la fonction $g \in \mathbb{R}^d \mapsto |g|^4$ à la seconde ligne. On en déduit la convexité de J.

2.4 Formulation énergétique et retour à la formulation variationnelle

Question 18. L'espace V_0 et la fonctionnelle J vérifient toutes les hypothèses du théorème. On a donc l'existence d'au moins un minimiseur u_0 de J, qui vérifie $dJ_{u_0}(v) = 0$ pour tout $v \in V_0$. On a montré que $dJ_{u_0}(v) = a(u,v) - b(v)$, ce qui donne donc que $u_0 \in V_0$ vérifie l'équation $a(u_0, v) = b(v)$ pour tout $v \in V_0$. C'est donc une solution de la formulation variationnelle.

Question 19. Soient u et v dans V_0. On calcule que

$$a(u,u-v) - a(v,u-v) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \nabla u \cdot \nabla(u-v) - \int_\Omega |\nabla v|^2 \nabla v \cdot \nabla(u-v) = \int_\Omega \langle |x|^2 x - |y|^2 y, x-y\rangle$$

avec $x = \nabla u$ et $y = \nabla v$. L'inégalité admise implique donc que

$$a(u,u-v) - a(v,u-v) \ge \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^4 \ge \alpha \|u-v\|_V^4,$$

où on a utilisé la Question 4 pour la dernière inégalité.

Supposons que u et v soient deux solutions de la formulation variationnelle. On a donc $a(u,w) = b(w)$ et $a(v,w) = b(w)$ pour tout $w \in V_0$, ce qui implique que $a(u,u-v) = a(v,u-v)$. Grace à l'inégalité ci-dessus, ceci entraine $u = v$. On obtient ainsi l'unicité de la solution à la formulation variationnelle.