DM – Équation des ondes et équation de Helmholtz

Cours EDP: approches variationnelles (ENPC 1A)

DM distribué le 6 mai 2026, à rendre pour le 3 juin 2026

L'objectif de ce devoir est d'étudier l'équation des ondes, et plusieurs équations associées. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et régulier, et soit T un temps final. On considère le problème suivant, dit équation des ondes: on cherche une fonction u, définie sur $(0,T)\times\Omega$, et vérifiant

$$\partial_{tt} u - \nabla \cdot (A(x)\nabla u) = f(t,x) \qquad \text{dans } (0,T)\times\Omega, \tag{1}$$

avec la condition aux limites $u(t,x) = 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Dans (1), le second membre f est une fonction du temps et de l'espace, définie sur $(0,T)\times\Omega$. Cette équation sera complétée ci-dessous par des conditions initiales. On suppose A ne dépend pas du temps, que $A \in (L^\infty(\Omega))^{d\times d}$ et que A est uniformément elliptique, au sens où

$$\exists \alpha > 0, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \forall x \in \Omega, \qquad A(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha\,|\xi|^2.$$

De manière volontaire, on ne précise pas exactement quel sens on donne à l'égalité (1), et on pourra ici considérer que c'est une égalité pour tout (t,x), avec des dérivées au sens classique.

Partie 1 – Source sinusoïdale et équation de Helmholtz

On suppose que f est donné par

$$f(t,x) = f_0(x)\,e^{-i\omega t},$$

avec $f_0 \in L^2(\Omega)$ et $\omega > 0$.

Question 1. On cherche une solution à (1) de la forme

$$u(t,x) = u_\omega(x)\,e^{-i\omega t}.$$

Montrer que u_ω vérifie

$$-\nabla\cdot(A\nabla u_\omega) - \omega^2\,u_\omega = f_0 \ \text{ dans } \Omega, \qquad u_\omega = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2}$$

dit problème de Helmholtz.

Question 2. On considère la formulation faible suivante: Trouver $u_\omega \in H^1_0(\Omega)$ tel que

$$\forall \varphi \in H^1_0(\Omega), \qquad \int_\Omega A\nabla u_\omega\cdot\nabla\varphi - \omega^2\int_\Omega u_\omega\,\varphi = \int_\Omega f_0\,\varphi. \tag{3}$$

Montrer que cette formulation faible (3) est équivalente à l'équation forte formalisant (2), et qui s'écrit: trouver $u_\omega \in H^1(\Omega)$ tel que

$$-\nabla\cdot(A\nabla u_\omega) - \omega^2\,u_\omega = f_0 \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \qquad u_\omega = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \tag{4}$$

A la différence de (1), on donne maintenant un sens précis à (3) et (4): les dérivées sont des dérivées au sens des distributions, et la première partie de (4) est une égalité au sens des distributions.

Question 3. Montrer que, si ω est suffisamment petit, alors il existe $m > 0$ tel que

$$\forall u \in H^1_0(\Omega), \qquad \int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla u - \omega^2\int_\Omega u^2 \geq m\,\|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Question 4. Montrer que, pour ω suffisamment petit, le problème (4) est bien posé.

Partie 2 – Décomposition de Fourier

On suppose ici que la matrice A est indépendante de x et proportionnelle à la matrice identité: $A(x) = c^2\,\mathrm{Id}$.

Question 5. Montrer que (1) s'écrit alors

$$\partial_{tt} u - c^2\,\Delta u = f(t,x) \qquad \text{dans } (0,T)\times\Omega. \tag{5}$$

Question 6. (Transformée de Fourier en temps) On définit la transformée de Fourier de u (par rapport à la variable temporelle t) par

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \qquad \widehat{u}(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Sous quelles hypothèses sur u cette transformée est-elle bien définie?

Question 7. Soit $x \in \Omega$ fixé. Montrer que, pour tout v tel que la fonction $t \mapsto v(t,x)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\widehat{\partial_{tt} v}(x,\omega) = -\omega^2\,\widehat{v}(x,\omega). \tag{6}$$

Indication: effectuer une intégration par parties en temps (deux fois).

Question 8. On admettra que la propriété (6) reste vraie pour toutes les fonctions qu'on sera appelé à manipuler. Montrer que la solution u de (5) vérifie

$$-\omega^2\,\widehat{u}(x,\omega) - c^2\,\Delta\widehat{u}(x,\omega) = \widehat{f}(x,\omega).$$

Question 9. En déduire que, pour chaque fréquence ω, la fonction $\widehat{u}(x,\omega)$ vérifie une équation de Helmholtz.

Question 10. (Interprétation) Expliquer pourquoi l'équation des ondes (5) peut être vue comme une superposition d'équations de Helmholtz indépendantes.

Partie 3 – Méthode de Faedo–Galerkin

On revient au problème (1) avec la condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$. On suppose de plus que $f = 0$ et on se donne les conditions initiales $u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $\partial_t u(0) = v_0 \in L^2(\Omega)$. On suppose que, pour tout $x \in \Omega$, la matrice $A(x)$ est symétrique.

Soit $\{w_k\}_{k\geq 1}$ une base de $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire une suite de fonctions de $H_0^1(\Omega)$ telle que tout $v \in H_0^1(\Omega)$ se décompose sous la forme

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (v, w_k)_{L^2}\, w_k,$$

où la série ci-dessus converge au sens de la norme $H^1(\Omega)$. On suppose de plus que les w_k sont orthonormés dans $L^2(\Omega)$ et orthogonaux au sens du produit scalaire $H^1(\Omega)$:

$$\langle w_k, w_j\rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{kj} \quad \text{et} \quad \langle w_k, w_j\rangle_{H^1(\Omega)} = \delta_{kj}\, \|w_k\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

On considère le sous-espace de dimension finie

$$V_N = \mathrm{Vect}\{w_1, \dots, w_N\}.$$

On définit

$$u_N(t,x) = \sum_{k=1}^{N} d_k^N(t)\, w_k(x),$$

solution du problème suivant: pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\int_\Omega \partial_{tt} u_N\, w_i + \int_\Omega A\nabla u_N \cdot \nabla w_i = 0. \tag{7}$$

On impose les conditions initiales $u_N(0) = P_N u_0$ et $\partial_t u_N(0) = P_N v_0$, où P_N est la projection orthogonale (au sens du produit scalaire $L^2(\Omega)$) sur V_N définie par

$$\forall v \in L^2(\Omega), \qquad P_N v = \sum_{k=1}^{N} (v, w_k)_{L^2}\, w_k.$$

Question 11. Montrer que le vecteur des coefficients $d(t) = \begin{pmatrix} d_1^N(t) \\ \vdots \\ d_N^N(t) \end{pmatrix}$ vérifie

$$M\ddot{d}(t) + Kd(t) = 0,$$

où M et K sont les matrices de taille $N \times N$ données par

$$M_{ij} = \int_\Omega w_j\, w_i, \qquad K_{ij} = \int_\Omega A(x)\nabla w_j \cdot \nabla w_i.$$

Question 12. Montrer que M et K sont symétriques définies positives.

Question 13. (Diagonalisation) On admet qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathbb{R}^{N\times N}$ telle que

$$Q^T M Q = \mathrm{Id}, \qquad Q^T K Q = D,$$

où Id est la matrice identité et où D est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs. En posant $y(t) = Q^{-1}d(t)$, montrer que y vérifie

$$\ddot{y}(t) + D\, y(t) = 0.$$

Question 14. En déduire que chaque composante $y_k(t)$ vérifie

$$\ddot{y}_k + \lambda_k\, y_k = 0,$$

où $\lambda_k = D_{kk}$. Résoudre explicitement ces équations.

Question 15. En déduire que $d(t)$ est de la forme

$$d(t) = \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k}\, t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k}\, t)\right) Q_k,$$

où Q_k est la k-ième colonne de la matrice Q.

Question 16. On définit l'énergie

$$E_N(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\partial_t u_N|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega A \nabla u_N \cdot \nabla u_N.$$

Montrer que $E_N(t)$ est bien définie, puis que

$$\frac{d}{dt} E_N(t) = 0.$$

Indication: utiliser l'équation (7) *vérifiée par* u_N *et tester (en se justifiant) avec* $\partial_t u_N$.

Question 17. En déduire l'existence d'une constante C indépendante de N et T telle que

$$\forall t \in (0,T), \quad \|\partial_t u_N(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_N(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Ce type d'estimée est utile pour passer à la limite $N \to \infty$, ce qui est une manière d'établir l'existence d'une solution (définie comme la limite de u_N) au problème (1).