Problèmes aux limites linéaires elliptiques

Frédéric Legoll

ENPC (Navier) et Inria

frederic.legoll@enpc.fr

http://cermics.enpc.fr/∼legoll/edpef.html

Introduction: exemples de problèmes aux limites

De nombreux phénomènes de la physique s'écrivent sous la forme d'équations aux dérivées partielles:

- Electrostatique: équations de Maxwell

  $$\text{div } E = \rho, \qquad E = -\nabla V$$

  d'où $-\Delta V = \rho$.

- Mécanique des fluides (météo, aéronautique, biologie, ...): équation de Navier-Stokes (conservation de la quantité de mouvement)

  $$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + \nu \Delta u + f, \qquad \text{div } u = 0$$

  ce qui donne, après simplification,

  $$-\nu \Delta u + \nabla p = f, \qquad \text{div } u = 0.$$

- Mécanique des solides, Finance, Reconnaissance d'images et vision assistée par ordinateur, ...

Introduction: un nouveau point de vue

Pour simplifier, on commence par considérer le problème suivant (en dimension finie):

$$\text{Trouver } u \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A\,u = B$$

où

- B est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$
- A est une matrice de taille $n \times n$ donnée, symétrique définie positive.

On sait depuis longtemps (algèbre linéaire!) que ce problème admet une unique solution.

Introduction: un nouveau point de vue

$$\text{Trouver } u \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A\,u = B \tag{1}$$

On va maintenant etudier ce problème différemment:

- si u est solution de (1), alors, en faisant le produit scalaire par $v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$v \cdot (A\,u) = v \cdot B$$

- sur $\mathbb{R}^n$, on introduit la forme bilinéaire a et la forme linéaire b définies par

$$a(u,v) = v \cdot (A\,u), \qquad b(v) = v \cdot B$$

  et on voit que, si u est solution de (1), alors

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \qquad a(u,v) = b(v) \tag{2}$$

- réciproquement, si $u \in \mathbb{R}^n$ est solution de (2), alors

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \qquad v \cdot (A\,u) = v \cdot B$$

  ce qui implique (puisque v est quelconque) que u est solution de (1).

On a donc établi que les problèmes (1) et (2) sont équivalents.

Introduction: un nouveau point de vue

- On a établi que les problèmes

$$\text{Trouver } u \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A\,u = B \tag{3}$$

et

$$\text{Trouver } u \in \mathbb{R}^n \text{ tel que, } \forall v \in \mathbb{R}^n, \text{ on ait } a(u,v) = b(v) \tag{4}$$

sont équivalents.

- On va introduire un théorème très puissant, le théorème de Lax-Milgram, permettant d'établir le caractère bien posé (existence et unicité de la solution) de problèmes de la forme générale

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que, } \forall v \in V, \text{ on ait } a(u,v) = b(v)$$

- Ceci montrera que (4), et donc (3), est bien posé.

Introduction: mise en oeuvre pour les EDP

On va procéder exactement de la même manière pour étudier les EDP:

- Etape 1: On établit l'équivalence entre l'EDP (munie de ses conditions aux limites!) et un problème de la forme

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = b(v) \end{cases}$$

  où

  - V est un espace de fonctions (en l'occurence un espace de Sobolev),
  - $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire sur $V \times V$,
  - b une forme linéaire sur V.

  Avant d'établir rigoureusement une équivalence, on pourra commencer par travailler "au brouillon", sans souci de rigueur.

- Etape 2: En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on montre que le problème (I) est bien posé.

Remarques:

- Problème aux limites = EDP et conditions aux limites

- On dira que le problème

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = b(v) \end{cases}$$

  est la formulation variationnelle (ou aussi la formulation faible) du problème aux limites.

- Analogie avec le cours de mécanique:
  - (I) est le principe des travaux virtuels
  - v est le champ de déplacement virtuel

L'espace $H^1(\Omega)$

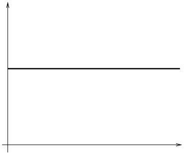
Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, on rappelle que

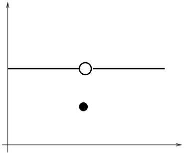
$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq d \right\}$$

Théorème (cf. exercice 2.17 du poly)

En dimension $d = 1$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ admettent un représentant continu: pour tout $u \in H^1(\Omega)$, il existe $v \in C^0(\overline{\Omega})$ tel que $u = v$ presque partout sur Ω (un tel v est alors unique).

On dit que, en dimension un, les fonctions de $H^1(\Omega)$ sont dans $C^0(\overline{\Omega})$.





Attention, ce résultat est faux en dimension $d \geq 2$ (exercice 2.18).

Notion de trace ("valeur au bord")

Pour une fonction u définie sur Ω,
peut-on définir sa "restriction" $u_{|\partial\Omega}$ sur le bord de Ω?

- Pour une fonction $u \in C^0(\overline{\Omega})$, la trace de u sur $\partial\Omega$ est définie par

$$\begin{array}{rcl} \gamma(u) \, : \, \partial\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

  i.e. $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$: c'est simplement la restriction de u sur le bord de Ω

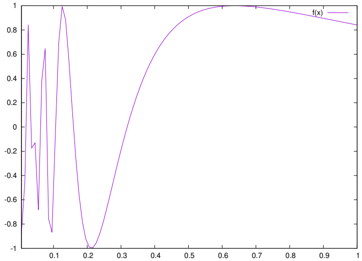
- Mais il existe des fonctions de $L^2(\Omega)$ pour lesquelles on ne sait pas définir la trace!

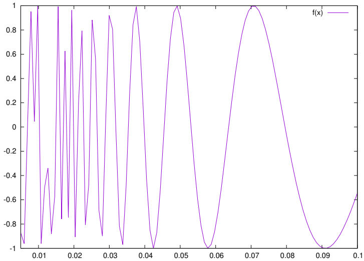
La trace n'est pas définie dans L^2

Exemple:

$$f(x) = \sin(1/x) \qquad \text{sur} \qquad \Omega =]0,1[.$$

La fonction f est bornée, donc elle est dans $L^\infty(\Omega)$, donc dans $L^2(\Omega)$.





Pas clair de définir la valeur de f en $x = 0$.

Pire: pour tout $\ell \in [-1,1]$, il existe une suite $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ t.q. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

Trace dans H^1

Les fonctions dans H^1 sont plus régulières que les fonctions de L^2: est-ce que cette régularité supplémentaire permet de définir une valeur au bord?

- En dimension $d = 1$ (pour $\Omega =]a, b[$):
  - une fonction de $H^1(]a, b[)$ est aussi dans $C^0([a, b])$
  - on peut donc définir la trace en a et en b d'une fonction de $H^1(]a, b[)$ (au même titre que pour les fonctions dans $C^0(\overline{\Omega})$)

- En dimension $d \geq 2$:
  - une fonction dans $H^1(\Omega)$ n'est pas nécessairement continue (cf. exercice 2.18 du poly)
  - cependant (propriété admise), on peut définir la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$.

Trace dans H^1

Soit Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. Il existe une application linéaire et continue

$$\begin{array}{rcl} \gamma \,:\, H^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\partial\Omega) \\ u & \mapsto & \gamma(u) \end{array}$$

qui à $u \in H^1(\Omega)$ associe sa "restriction sur le bord" $\gamma(u)$, qui est dans $L^2(\partial\Omega)$.

- La linéarité de γ est naturelle:

  $$\text{restriction de } (u_1 + u_2) = \text{restriction de } u_1 + \text{restriction de } u_2.$$

- Le fait que γ soit continu signifie: il existe C_Ω tel que

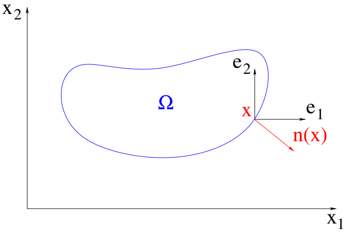
  $$\forall u \in H^1(\Omega), \qquad \|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

- Si, en plus d'être dans $H^1(\Omega)$, la fonction u est dans $C^0(\overline{\Omega})$, alors on a $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$: pour de telles fonctions, la trace (au sens des fonctions $H^1(\Omega)$) est simplement la restriction usuelle (au sens des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$).

- La trace d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ est bien définie même si $u \notin C^0(\overline{\Omega})$.

- On a $H^1_0(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \gamma(u) = 0 \right\}$.

Intégration par parties en dimension d

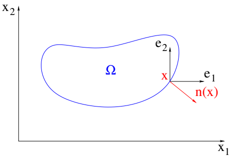


Formule d'IPP:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v = \int_{\partial\Omega} u\, v\, (n \cdot e_i) - \int_\Omega u\, \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

où $n(x)$ est la normale sortante à Ω au point $x \in \partial\Omega$ et e_i est le i-ième vecteur de base de $\mathbb{R}^d$ ($n \cdot e_i$ est donc la composante i du vecteur n).

Intégration par parties en dimension d



Formule d'IPP:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v = \int_{\partial\Omega} u\, v\, (n \cdot e_i) - \int_\Omega u\, \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Dans le cas monodimensionnel $\Omega = (0,1)$, on a

$$\int_0^1 \frac{du}{dx}\, v = \int_{\partial\Omega} u\, v\, (n \cdot e_1) - \int_0^1 u\, \frac{dv}{dx}$$

où $\partial\Omega = \{0\} \cup \{1\}$ et

- $n(1) \cdot e_1 = 1$ car le vecteur normal sortant en $x = 1$ est e_1
- $n(0) \cdot e_1 = -1$ car le vecteur normal sortant en $x = 0$ est $-e_1$

On retrouve bien $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{dx}\, v = u(1)\, v(1) - u(0)\, v(0) - \int_0^1 u\, \frac{dv}{dx}$

Intégration par parties en dimension d

Formule d'IPP:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v = \int_{\partial\Omega} u\, v\, (n \cdot e_i) - \int_\Omega u\, \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Formule de Green: pour tout $\varphi \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\, v &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, v\, (n \cdot e_i) - \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \left[\text{choisir } u = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right] \\ &= \int_{\partial\Omega} (\nabla \varphi \cdot e_i)\, v\, (n \cdot e_i) - \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, \frac{\partial v}{\partial x_i}\end{aligned}$$

On somme sur $i = 1$ à d:

$$\int_\Omega (\Delta \varphi)\, v = \int_{\partial\Omega} (\nabla \varphi \cdot n)\, v - \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla v$$

et on utilise souvent la notation $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi \cdot n$.

Un premier exemple

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(\Omega)$. Pour $\lambda > 0$, on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On commence par chercher ("au brouillon") une formulation variationnelle:

- On multiplie l'EDP par une fonction v et on intègre sur Ω:

$$-\int_\Omega (\Delta u)\, v + \lambda \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v$$

- On intègre par parties pour abaisser au maximum l'ordre de l'espace de Sobolev sous-jacent et incorporer les conditions aux limites:

$$\int_\Omega f\, v = -\int_\Omega (\Delta u)\, v + \lambda \int_\Omega u\, v = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega u\, v$$

Un premier exemple

$$\int_\Omega f\, v = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega u\, v$$

- Donc, pour v nulle au bord (idée reminiscente du fait qu'on cherche u nulle au bord), on a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v.$$

- Ceci conduit à proposer comme formulation faible

(FV) Chercher $u \in V$ tel que, $\forall v \in V$, on ait $a(u, v) = b(v)$

avec

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega u\, v, \qquad b(v) = \int_\Omega f\, v$$

et $V = H^1_0(\Omega)$:

- on se place dans $H^1(\Omega)$ pour que a et b soient bien définies dans V
- on se restreint à $H^1_0(\Omega)$ pour prendre en compte la condition nulle au bord sur u et sur v