Equations aux dérivées partielles: approches variationnelles

Examen du 5 juin 2023

documents autorisés – durée 2h30

L'examen comporte un exercice et un problème indépendants.

1 Exercice: le bilaplacien

Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^d$, qu'on suppose aussi connexe afin de pouvoir utiliser l'inégalité de Poincaré–Wirtinger (cf. ci-dessous). Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème:

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que, pour tout } v \in V, \quad a(u,v) = b(v) \tag{1}$$

avec

$$V = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$$

et où les formes bilinéaire a et linéaire b sont définies par

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad b(v) = \int_\Omega f\, v.$$

On admet que l'espace vectoriel V, muni du produit scalaire $(u,v)_{H^2(\Omega)}$, est un espace de Hilbert. On note $\|\cdot\|_V$ la norme associée.

Question 1. Donner l'expression de $\|u\|_V$ en terme de u et de ses derivées.

Question 2. Montrer que la forme bilinéaire a est continue sur $V \times V$, et que la forme linéaire b est continue sur V.

Question 3. En utilisant l'inégalité de Poincaré–Wirtinger (cf. le Théorème 3.22 du polycopié), montrer qu'il existe $C_\Omega > 0$ tel que, pour tout $g \in V$,

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \left\| \nabla \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

On pourra commencer par calculer la moyenne de $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ sur Ω.

Question 4. En utilisant l'inégalité de Poincaré sur $H^1_0(\Omega)$, montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall u \in V, \qquad \|u\|_V^2 \le \beta \int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2.$$

Question 5. En déduire que la forme bilinéaire a est coercive sur V.

Question 6. Montrer que le problème (1) est bien posé.

Question 7. Montrer que la solution u de (1) vérifie

$$\Delta\Delta u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

où l'opérateur bilaplacien est défini par

$$\Delta\Delta u = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}.$$

2 Problème: une EDP nonlinéaire

Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^d$ et f une fonction définie sur Ω. Le but de ce problème est d'étudier le caractère bien posé de l'Equation aux Dérivées Partielles suivante:

$$-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^2\,\nabla u\right) = f \quad \text{dans } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{2}$$

Les espaces de travail pour f et u seront précisés ci-dessous. On rappelle les notations suivantes:

- pour $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$, on note $|g| = \sqrt{g_1^2 + \cdots + g_d^2}$ la norme euclidienne de g;
- pour $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on note $\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_d} \end{pmatrix} \in (\mathcal{D}'(\Omega))^d$ son gradient;
- pour $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_d \end{pmatrix} \in (\mathcal{D}'(\Omega))^d$, on note $\mathrm{div}\,\psi = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial \psi_d}{\partial x_d} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sa divergence.

On rappelle l'inégalité de Hölder (cf. Théorème A.7 du polycopié): soient p et q deux réels avec $1 < p < \infty$, $1 < q < +\infty$ et $1/p + 1/q = 1$. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et soit $g \in L^q(\Omega)$. Alors le produit de fonctions $f\,g$ est dans $L^1(\Omega)$ et on a l'inégalité (dite inégalité de Hölder) suivante:

$$\|f\,g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\;\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

On introduit l'espace V défini par

$$V = \left\{ u \in L^4(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^4(\Omega) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq d \right\},$$

où la dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est bien sur à comprendre au sens des distributions. On munit V de la norme

$$\|u\|_V = \left(\|u\|^4_{L^4(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^4_{L^4(\Omega)} \right)^{1/4}.$$

On note V_0 la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans V:

$$V_0 = \left\{ u \in V \text{ tel qu'il existe une suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ d'éléments de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ tel que } \lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_V = 0 \right\}.$$

2.1 Préliminaires

Question 1. On rappelle que l'espace $L^4(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}$. En s'inspirant de la preuve de complétude de l'espace $H^1(\Omega)$ (cf. le polycopié), montrer que V est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_V$.

Question 2. Expliquer pourquoi V_0 est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_V$.

Question 3. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer qu'il existe $C_P > 0$ tel que

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_P\,\|\nabla u\|_{L^4(\Omega)}, \tag{3}$$

où on a noté $\|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^4_{L^4(\Omega)} \right)^{1/4}$. On prendra garde à ne pas confondre cette quantité avec la norme dans $L^4(\Omega)$ de l'application $x \mapsto |\nabla u(x)|$, où $|\nabla u(x)|$ est la norme euclidienne du vecteur $\nabla u(x)$. *Indication: on pourra s'inspirer de la démonstration de l'inégalité de Poincaré (cf. le polycopié).*

Question 4. En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que, pour tout u et v dans $L^4(\Omega)$, on a $\Big| \|u\|_{L^4(\Omega)} - \|v\|_{L^4(\Omega)} \Big| \leq \|u - v\|_{L^4(\Omega)}$. Montrer de même que, pour tout u et v dans V, on a $\Big| \|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} - \|\nabla v\|_{L^4(\Omega)} \Big| \leq \|\nabla u - \nabla v\|_{L^4(\Omega)}$. Déduire de la Question 3 que

$$\forall u \in V_0, \quad \|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_P \, \|\nabla u\|_{L^4(\Omega)}, \tag{4}$$

Question 5. Soit $u \in V$. Montrer que

$$\int_\Omega |\nabla u|^4 \leq d \, \|\nabla u\|^4_{L^4(\Omega)}. \tag{5}$$

On pourra utiliser le fait que, pour tout vecteur $g \in \mathbb{R}^d$, on a $|g|^4 = (g \cdot g)^2 = \left(\sum_{i=1}^d g_i^2 \right)^2$ et que, pour tous réels a_i, on a $\left(\sum_{i=1}^d a_i \right)^2 \leq d \sum_{i=1}^d a_i^2$.

2.2 EDP nonlinéaire

Soit $f \in L^{4/3}(\Omega)$. On considère le problème suivant:

$$\text{Chercher } u \in V_0 \text{ tel que} \qquad -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^2 \, \nabla u \right) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{6}$$

Le problème (6) est la formalisation de (2). Remarquer en particulier que la condition aux limites dans (2) est prise en compte dans (6) via l'espace fonctionnel dans lequel on cherche la solution.

On introduit

$$a(u, v) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^d \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \frac{\partial u}{\partial x_i} \, \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

et

$$b(v) = \int_\Omega f \, v.$$

Question 6. Montrer que, pour tout $u \in V$ et tout $1 \leq i \leq d$, on a $|\nabla u|^2 \, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{4/3}(\Omega)$. Expliquer en quoi ce résultat permet de donner un sens au membre de gauche de (6).

Question 7. Montrer que $b(v)$ est bien définie pour tout $v \in V$ et que l'application $v \mapsto b(v)$ est linéaire et continue sur V.

Question 8. Montrer que $a(u, v)$ est bien définie pour tout u et v dans V et que l'application $v \mapsto a(u, v)$ est linéaire et continue sur V. L'application $u \mapsto a(u, v)$ est-elle linéaire?

Question 9. Montrer (dans le détail) que le problème (6) peut s'écrire de manière **équivalente** sous la forme

$$\text{chercher } u \in V_0 \text{ tel que, pour tout } v \in V_0, \text{ on a } a(u, v) = b(v). \tag{7}$$

Question 10. Peut-on utiliser le théorème de Lax-Milgram pour étudier le caractère bien posé de (7)?

2.3 Introduction d'une énergie

Soit $J : V_0 \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie sur V_0 par

$$\forall v \in V_0, \quad J(v) = \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla v|^4 - \int_\Omega f\, v,$$

où on rappelle que $f \in L^{4/3}(\Omega)$.

Question 11. Montrer que, pour tout $v \in V_0$, la quantité $J(v)$ est effectivement bien définie.

Question 12. Soit $v \in V$. Montrer que

$$\|\nabla v\|^4_{L^4(\Omega)} \leq d \int_\Omega |\nabla v|^4. \tag{8}$$

Question 13. Montrer qu'il existe $\mu > 0$ et une constante C tels que

$$\forall v \in V_0, \quad J(v) \geq \mu\, \|v\|_V^4 - C\, \|v\|_V.$$

En déduire que J est infinie à l'infinie, c'est-à-dire que

$$\lim_{\|v\|_V \to \infty} J(v) = \infty.$$

Question 14. Montrer que, pour tout u et v dans V_0, on a

$$|\nabla u + \nabla v|^4 = |\nabla u|^4 + 4\,(\nabla u \cdot \nabla v)^2 + |\nabla v|^4 + 4\,(\nabla u \cdot \nabla v)\,|\nabla u|^2 + 2\,|\nabla u|^2\,|\nabla v|^2 + 4\,(\nabla u \cdot \nabla v)\,|\nabla v|^2.$$

On pourra utiliser à nouveau que, pour tout vecteur $g \in \mathbb{R}^d$, on a $|g|^4 = (g \cdot g)^2$.

Question 15. Montrer que la fonctionnelle J est différentiable sur V_0 et calculer sa différentielle $v \mapsto dJ_u(v)$ (on demande donc de donner, pour tout $v \in V_0$, l'expression de $dJ_u(v) \in \mathbb{R}$).

Question 16. Montrer que la fonctionnelle J est continue sur V_0.

Question 17. Montrer que la fonctionnelle J est convexe sur V_0. On rappelle qu'une fonction $s : E \to \mathbb{R}$ est convexe (ici, E est un espace vectoriel) si et seulement si $s(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\, s(x) + (1-\lambda)\, s(y)$ pour tout x et y dans E et tout $\lambda \in [0,1]$.

2.4 Formulation énergétique et retour au problème (7)

On s'intéresse au problème suivant:

$$\text{Chercher } u \in V_0 \text{ tel que } J(u) = \inf_{v \in V_0} J(v). \tag{9}$$

On admet le résultat suivant:

Théorème 1 *Soit V_0 un espace de Banach, et soit $J : V_0 \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue et convexe sur V_0 et infinie à l'infinie. Alors J admet au moins un minimiseur global $u_0 \in V_0$. De plus, si J est différentiable en u_0, alors*

$$\forall v \in V_0, \quad dJ_{u_0}(v) = 0.$$

Question 18. Montrer que le problème (9) admet (au moins) une solution, et en déduire que le problème (7) admet (au moins) une solution.

Question 19. On admet que, pour tout x et y vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\langle |x|^2 x - |y|^2 y, x - y\rangle \geq \frac{1}{4}\,|x-y|^4, \tag{10}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^d$ (on rappelle que $|\cdot|$ est la norme euclidienne associée). Utiliser cette relation pour montrer que le problème (7) admet au plus une solution. *Indication: on pourra s'intéresser au calcul de $a(u, u-v) - a(v, u-v)$ pour u et v dans V_0.*