

# Principes de modélisation

Fiche d'exercices du 16 septembre 2025

**Exercice 1** (Marche aléatoire en 1D: expressions exactes). *On considère à nouveau la marche aléatoire en 1D vue en cours, et on note encore  $P(n, k)$  la probabilité de présence de la particule à l'instant  $n \Delta t$  au point  $k \Delta x$ . On va montrer ici qu'on peut en fait obtenir une expression exacte pour  $P(n, k)$ . Par symétrie, on a  $P(n, k) = P(n, -k)$ . On peut donc ne s'intéresser qu'aux valeurs  $k \geq 0$ .*

*On suppose que  $n$  est pair.*

1. *Montrer que, après  $n$  itérations, la position maximale qui puisse être atteinte est  $n \Delta x$ . Montrer aussi que seules les positions  $k$  paires peuvent être atteintes.*
2. *Soit  $k \in [0, n]$  avec  $k$  pair. Pour atteindre cette position  $k$ , combien faut-il de déplacements vers la droite et combien vers la gauche?*
3. *Montrer qu'il y a*

$$\binom{n}{n/2 + k/2} = \frac{n!}{(n/2 + k/2)! (n/2 - k/2)!}$$

*tirages permettant d'arriver à la position  $k$ .*

4. *Chaque tirage ayant la probabilité  $1/2^n$  d'apparaître, en déduire que*

$$P(n, k) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{(n/2 + k/2)! (n/2 - k/2)!}. \quad (1)$$

5. *En utilisant le fait que, pour  $k$  impair,  $P(n, k) = 0$ , vérifier que  $P(n, \cdot)$  est bien une probabilité discrète, au sens où  $P(n, k) \geq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} P(n, k) = 1$  (ce qui correspond au fait que, au temps  $n$ , la particule est quelque part).*

**Remarque 1.** *On pourrait faire un calcul similaire pour  $n$  impair. Seules les positions  $k$  impaires peuvent être atteintes, et on a, comme dans (1),*

$$P(n, k) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{((n+k)/2)! ((n-k)/2)!}$$

*si  $k$  est impair et  $P(n, k) = 0$  si  $k$  est pair.*

**Exercice 2** (Equation de la chaleur, solution homogène). *Soit  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . On cherche à résoudre le problème suivant:*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & t > 0 \\ u(0) = g. \end{cases} \quad (2)$$

*On va pour cela utiliser la transformée de Fourier, ainsi que la solution fondamentale  $G$  construite en cours. Soit  $\hat{u}$  la transformée de Fourier de  $u$  solution de (2).*

1. Montrer que

$$\partial_t \widehat{u}(t, k) + |k|^2 \widehat{u}(t, k) = 0,$$

2. En déduire que  $\widehat{u}(t, k) = C(k) \widehat{G}(t, k)$  pour une fonction  $C(k)$  ne dépendant que de  $k$ .

3. En utilisant la condition initiale, montrer que  $\widehat{u}(t, k) = \widehat{g}(k) \widehat{G}(t, k)$ .

4. En déduire que

$$u(t, x) = (G(t, \cdot) \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t, x-y) g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy. \quad (3)$$

**Exercice 3** (Principe du maximum). A l'aide de l'expression (3), montrer le principe du maximum (théorème 15 du cours), i.e.

$$\sup_{t>0} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

**Exercice 4** (Comportement asymptotique). A l'aide de l'expression (3), montrer les résultats suivants concernant le comportement asymptotique de  $u$  (théorème 16 du cours), sous l'hypothèse que  $g \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ :

$$\forall t > 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0.$$

**Exercice 5** (Marche aléatoire avec absorption au bord). On considère une marche aléatoire dans un domaine borné  $\Omega$ , et on suppose que toute particule qui atteint le bord disparaît: lorsque la particule est en  $k = 1$  au temps  $n$ , elle peut sauter à droite avec probabilité  $1/2$  (et les itérations en temps se poursuivent), ou bien sauter à gauche avec probabilité  $1/2$ , et dans ce cas elle disparaît. Par une démarche similaire à celle vue en cours, montrer que

1. la loi d'évolution est alors

$$P(n+1, k) = \frac{1}{2}(P(n, k-1) + P(n, k+1)), \quad (4)$$

pour tout  $2 \leq k \leq K-2$ .

2. au niveau du bord gauche, on a

$$P(n+1, k=1) = \frac{1}{2}P(n, k+1),$$

et de même, pour le bord droit, on a

$$P(n+1, k=K-1) = \frac{1}{2}P(n, k-1).$$

3. en prenant la convention  $P(n, k=0) = P(n, k=K) = 0$ , montrer qu'on obtient finalement (4) pour tout  $1 \leq k \leq K-1$ .

En passant à la limite  $\Delta t$  et  $\Delta x$  vers 0, expliquer pourquoi on va obtenir l'équation de la chaleur avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes:

$$\partial_t u = \frac{\alpha}{2} \partial_{xx} u \quad \text{dans } \Omega, \quad u(t, \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

**Exercice 6** (Marche aléatoire avec réflexion). On considère une marche aléatoire dans un domaine borné  $\Omega$ , et on suppose que toute particule qui atteint le bord est renvoyée vers l'intérieur du domaine avec probabilité  $1/2$ . Par une démarche similaire à celle vue en cours, montrer que

1. la loi d'évolution est (4) pour tout  $1 \leq k \leq K-1$ .

2. au niveau du bord gauche, on a

$$P(n+1, k=0) = \frac{1}{2}P(n, k=0) + \frac{1}{2}P(n, k=1),$$

et donc

$$P(n+1, k=0) - P(n, k=0) = \frac{1}{2}(P(n, k=1) - P(n, k=0)).$$

3. à l'aide du lien vu en cours entre  $P$  et  $u$ , en déduire que

$$\Delta t \partial_t u(t, 0) = \frac{\Delta x}{2} \partial_x u(t, 0).$$

4. en utilisant le scaling diffusif, montre que

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha} \partial_t u(t, 0) = \frac{\Delta x}{2} \partial_x u(t, 0),$$

puis (par un passage à la limite) que  $\partial_x u(t, 0) = 0$ .

Expliquer pourquoi on va finalement obtenir l'équation de la chaleur avec conditions aux limites de Neumann homogènes:

$$\partial_t u = \frac{\alpha}{2} \partial_{xx} u \quad \text{dans } \Omega, \quad \partial_x u(t, \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

**Exercice 7** (Comportement asymptotique (en domaine borné)). Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^d$ ,  $g \in L^2(\Omega)$  et  $u \in C^0([0; T], L^2(\Omega))$  l'unique solution de

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{pour tout } t > 0, \text{ dans } \Omega, \\ u(0) = g & \text{dans } \Omega, \\ u(t, \cdot) = 0 & \text{pour tout } t > 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

On suppose que  $f$  est indépendant du temps. On souhaite alors montrer (théorème 24 du cours) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - v\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

où  $v$  est l'unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$  du problème  $-\Delta v = f$ . On introduit pour cela  $w(t) = u(t) - v$ .

1. Montrer que  $w$  vérifie

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w = 0 & \text{pour tout } t > 0, \text{ dans } \Omega, \\ w(0) = g - v & \text{dans } \Omega, \\ w(t, \cdot) = 0 & \text{pour tout } t > 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2. En déduire que

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} w^2 + \int_{\Omega} |\nabla w|^2 = 0 \quad \text{pour tout } t > 0.$$

3. On rappelle l'inégalité de Poincaré sur  $\Omega$ : il existe  $\lambda > 0$  tel que

$$\forall q \in H_0^1(\Omega), \quad \|q\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Montrer que, pour tout  $t > 0$ ,

$$\partial_t \int_{\Omega} w^2 = -2 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \leq -\frac{2}{\lambda^2} \int_{\Omega} w^2.$$

4. En déduire que, pour tout  $t > 0$ ,

$$\int_{\Omega} w^2(t, \cdot) \leq \exp(-2t/\lambda^2) \int_{\Omega} w^2(t=0, \cdot),$$

et donc que

$$\|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \exp(-t/\lambda^2) \|w(t=0)\|_{L^2(\Omega)} = \exp(-t/\lambda^2) \|g - v\|_{L^2(\Omega)}.$$

5. Conclure.

**Remarque 2.** On notera que la vitesse de décroissance de  $u(t)$  vers sa limite en temps infini est gouvernée par la constante de Poincaré dans  $\Omega$ .