Problèmes multiéchelles : aspects théoriques et numériques (M2 ANEDP, Paris 6)

Correction de l'examen du 6 janvier 2017

1 Estimations a priori

Question 1a. Soit $w \in H^1_0(\Omega)$. On calcule

$$a_\varepsilon(w,w) = \int_\Omega (\nabla w)^T A_\varepsilon \nabla w + (b_\varepsilon \cdot \nabla w) w$$

et le second terme est nul. En effet, on a

$$\int_\Omega (b_\varepsilon \cdot \nabla w) w = \frac{1}{2} \int_\Omega b_\varepsilon \cdot \nabla (w^2) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (b_\varepsilon \cdot n) w^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega w^2 \operatorname{div}(b_\varepsilon).$$

Le premier terme ci-dessus est nul car $w = 0$ sur $\partial\Omega$, et le second terme est nul grace à l'hypothèse $\operatorname{div} b_\varepsilon = 0$. Ceci montre donc (5).

En utilisant (1) puis l'inégalité de Poincaré, on déduit de (5) que

$$a_\varepsilon(w,w) \geq m \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} \geq m C_\Omega \|w\|^2_{H^1(\Omega)},$$

ce qui prouve (6).

Question 1b. La formulation variationnelle associée à (3) est (7) avec $\ell(w) = \int_\Omega f\, w$. Les formes linéaires a_ε et ℓ sont continues sur $H^1_0(\Omega)$, et la forme bilinéaire a_ε est coercive au vu de (6). Grace au théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence et l'unicité de la solution de (7), et donc de (3).

Question 1c. On prend comme fonction test $w = u_\varepsilon$ dans (7), et on a, en utilisant (6),

$$\alpha \|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \ell(u_\varepsilon) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$$

d'où la borne (8).

Question 1d. On se place en dimension $d = 1$, avec $b_\varepsilon = 0$ et $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$ où a est une fonction régulière périodique non constante. L'équation (3) indique que

$$-\frac{1}{\varepsilon} a'(x/\varepsilon) u'_\varepsilon(x) - a(x/\varepsilon) u''_\varepsilon(x) = f(x)$$

donc

$$u''_\varepsilon(x) = -\frac{f(x)}{a(x/\varepsilon)} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{a'(x/\varepsilon)}{a(x/\varepsilon)} u'_\varepsilon(x).$$

Le premier terme est borné dans $L^2(\Omega)$, tandis que le second est d'ordre $1/\varepsilon$. Donc $\|u''_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ est d'ordre $1/\varepsilon$.

2 Estimation d'erreur générale

Question 2a. On utilise (5) avec $w = u_\varepsilon - u_\varepsilon^H$, qui est bien dans $H_0^1(\Omega)$ (noter qu'on utilise la conformité de l'approche, $W_H \subset H_0^1(\Omega)$). On a donc

$$\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H) = a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H, u_\varepsilon - u_\varepsilon^H) = a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H, u_\varepsilon - v_H),$$

la dernière égalité provenant du fait que $a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H, w_H) = 0$ pour tout $w_H \in W_H$.

Question 2b. On écrit

$$\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - v_H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H) = \int_\Omega \left[A_\varepsilon^{1/2}\nabla(u_\varepsilon - v_H)\right]^T \left[A_\varepsilon^{1/2}\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]$$

et on utilise Cauchy-Schwarz (d'abord dans $\mathbb{R}^d$, puis dans $L^2(\Omega)$).

Question 2c. On écrit

$$\int_\Omega \left[b_\varepsilon \cdot \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right](u_\varepsilon - v_H) = \int_\Omega \left[A_\varepsilon^{-1/2} b_\varepsilon (u_\varepsilon - v_H)\right]^T \left[A_\varepsilon^{1/2}\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]$$

puis on utilise Cauchy-Schwarz, d'abord dans $\mathbb{R}^d$, puis dans $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[b_\varepsilon \cdot \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right](u_\varepsilon - v_H) \\
\leq\ & \int_\Omega \left|A_\varepsilon^{-1/2} b_\varepsilon (u_\varepsilon - v_H)\right| \ \left|A_\varepsilon^{1/2}\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right| \\
\leq\ & \left(\int_\Omega \left|A_\varepsilon^{-1/2} b_\varepsilon (u_\varepsilon - v_H)\right|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|A_\varepsilon^{1/2}\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right|^2\right)^{1/2} \\
=\ & \left(\int_\Omega b_\varepsilon^T (A_\varepsilon)^{-1} b_\varepsilon \ (u_\varepsilon - v_H)^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Question 2d. En utilisant les Questions 2a, 2b et 2c, on obtient que, pour tout $v_H \in W_H$,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right)^{1/2} \\
=\ & a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H, u_\varepsilon - v_H) \\
=\ & \int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - v_H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H) + \int_\Omega \left[b_\varepsilon \cdot \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right](u_\varepsilon - v_H) \\
\leq\ & \left(\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - v_H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - v_H)\right)^{1/2} \\
&+ \left(\int_\Omega b_\varepsilon^T (A_\varepsilon)^{-1} b_\varepsilon \ (u_\varepsilon - v_H)^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ceci implique donc que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right)^{1/2} \\
&\quad \leq \left(\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - v_H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - v_H)\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega b_\varepsilon^T (A_\varepsilon)^{-1} b_\varepsilon \ (u_\varepsilon - v_H)^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

En utilisant (1), on obtient (14), puis (10).

Question 3. Un résultat classique en éléments finis est qu'il existe $v_H \in W_H$ tel que $\|u_\varepsilon - v_H\|_{H^1(\Omega)} \le CH\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)}$, où C est une constante indépendante de ε et de H. La Question 1d montre qu'en general, $\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)}$ est d'ordre $1/\varepsilon$, si bien que $\|u_\varepsilon - v_H\|_{H^1(\Omega)} \le CH/\varepsilon$. En utilisant ceci dans (10), on obtient $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^H\|_{H^1(\Omega)} \le CH/\varepsilon$. L'approximation n'est précise que si $H \ll \varepsilon$.

3 Une approche du type Elements finis multi-échelles

Question 4. Soit $\phi \in \mathcal{D}(0,1)$ et $v \in W_H$. On vérifie que

$$\begin{aligned}\langle v', \phi\rangle = -\langle v, \phi'\rangle = -\int_0^1 v\phi' &= -\sum_{i=1}^I \int_{x_{i-1}}^{x_i} v\phi' \\ &= \sum_{i=1}^I \int_{x_{i-1}}^{x_i} v'\phi - \sum_{i=1}^I \big(v(x_i)\phi(x_i) - v(x_{i-1})\phi(x_{i-1})\big),\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $v \in H^1(K_i)$ pour tout i. Comme v est continue aux noeuds, les termes de bord s'annulent deux à deux, donc

$$\langle v', \phi\rangle = \sum_{i=1}^I \int_{x_{i-1}}^{x_i} v'\phi,$$

ce qui montre bien que $v \in H^1(0,1)$.

Question 5. On estime $\|u_\varepsilon - v_H\|_{H^1(\Omega)}$ pour $v_H = R_H u_\varepsilon$.

5a. Sur chaque K_i, on a

$$\mathcal{L}_\varepsilon e = \mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon - \mathcal{L}_\varepsilon v_H = f - \mathcal{L}_\varepsilon v_H$$

et le dernier terme est nul par définition de W_H.

5b. Comme $e \in H^1_0(\Omega)$, on peut utiliser (5), ce qui donne

$$m|e|^2_{H^1(\Omega)} \le a_\varepsilon(e,e) = \sum_{i=1}^I \int_{x_{i-1}}^{x_i} A_\varepsilon |e'|^2 + \int_{x_{i-1}}^{x_i} b_\varepsilon\, e'\, e.$$

En intégrant par partie sur chaque K_i et en utilisant que e s'annule au bord des K_i, on déduit que

$$m|e|^2_{H^1(\Omega)} \le \sum_{i=1}^I \int_{x_{i-1}}^{x_i} e\,\mathcal{L}_\varepsilon e.$$

Puis on conclut grace à la Question 5a.

5c. On écrit

$$m|e|^2_{H^1(\Omega)} \le \sum_{i=1}^I \|f\|_{L^2(K_i)}\, \|e\|_{L^2(K_i)} \le CH \sum_{i=1}^I \|f\|_{L^2(K_i)}\, |e|_{H^1(K_i)} \le CH\|f\|_{L^2(\Omega)}|e|_{H^1(\Omega)},$$

d'où le résultat.

5d. On a

$$\|e\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{I} \|e\|^2_{L^2(K_i)} \le C^2 H^2 \sum_{i=1}^{I} |e|^2_{H^1(K_i)} = C^2 H^2 |e|^2_{H^1(\Omega)}.$$

On utilise la Question 5c pour conclure.

Question 6. On déduit de (10) que

$$\left|u_\varepsilon - u_\varepsilon^H\right|_{H^1(\Omega)} \le \sqrt{\frac{M}{m}}\ |e|_{H^1(\Omega)} + \frac{\left\| \sqrt{b_\varepsilon (A_\varepsilon)^{-1} b_\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{m}}\ \|e\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, $|b_\varepsilon(x)(A_\varepsilon(x))^{-1} b_\varepsilon(x)| \le |b_\varepsilon(x)|^2/m \le \|b_\varepsilon\|^2_{L^\infty(\Omega)}/m$. Les Questions 5c et 5d permettent de conclure.

Question 7. Sous l'hypothèse $|b_\varepsilon| \le M$, on déduit de la Question 6 que $\left|u_\varepsilon - u_\varepsilon^H\right|_{H^1(\Omega)} \le CH$ où C est indépendant de ε. Cette estimation est meilleure que celle obtenue à la Question 3, car elle ne nécessite pas $H \ll \varepsilon$ pour garantir une bonne précision.

Question 8. On écrit $\widetilde{e}(x) = \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x} \widetilde{e}'$, donc

$$|\widetilde{e}(x)| \le \left(\int_{x_{i-1}}^{x} 1\right)^{1/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x} (\widetilde{e}')^2\right)^{1/2} \le \sqrt{H}\ \|\widetilde{e}'\|_{L^2(K_i)},$$

donc

$$\|\widetilde{e}\|^2_{L^2(K_i)} \le H^2\ \|\widetilde{e}'\|^2_{L^2(K_i)},$$

d'où le résultat.

4 Un résultat d'homogénéisation

Question 9. En utilisant la notation $A_\varepsilon = A(\cdot/\varepsilon)$, on a

$$\text{div }(K_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = \text{div }(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) - \text{div }(H(\cdot/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon).$$

On calcule le second terme :

$$\begin{aligned}
\text{div }(H(\cdot/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} \left[H(\cdot/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon\right]_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i} \left[H_{ij}(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_j} u_\varepsilon\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} H_{ij}(\cdot/\varepsilon)\partial^2_{x_i,x_j} u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_i}(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_j} u_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Le premier terme est nul car H est antisymétrique. En utilisant la définition (24) de H pour réécrire le second terme, on voit que

$$\text{div } (H(\cdot/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{d} b_j(\cdot/\varepsilon)\partial_{x_j} u_\varepsilon = b_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon.$$

On obtient bien que u_ε satisfait (25).

Question 10. On sait déjà que $K \in (L^\infty(\mathbb{R}^d))^{d\times d}$. Soit maintenant $\xi \in \mathbb{R}^d$. On voit que

$$\xi^T K(y)\xi = \xi^T A(y)\xi - \sum_{i,j=1}^{d} H_{ij}(y)\xi_i\xi_j$$

et le dernier terme est nul car H est antisymétrique. En utilisant (21), on déduit que $\xi^T K(y)\xi \geq m\xi^T\xi$. Le champ de matrices K vérifie donc bien une hypothèse de type (21). La forme bilinéaire associée au problème (25) est donc coercive sur $H^1_0(\Omega)$, donc (25) est bien posé. Les problèmes (3) et (25) ayant une unique solution, et la solution de (3) vérifiant (25), on obtient que les problèmes (3) et (25) sont équivalents.

Question 11. On applique la théorie de l'homogénéisation périodique au problème (25). On introduit donc les correcteurs ψ_p solutions de (26), et la matrice homogénéisée $K^\star$ définie par : pour tout $p \in \mathbb{R}^d$,

$$K^\star p = \int_Q K(\nabla\psi_p + p).$$

La solution u_ε de (25) converge (faiblement dans $H^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$) vers u_0, solution de (27).

Question 12. On écrit le résultat d'homogénéisation en fonction de A et b plutot que K.

12a. L'équation du correcteur (26) donne

$$-\text{div } [A(\nabla\psi_p + p)] + \text{div } [H(\nabla\psi_p + p)] = 0.$$

Calculons le second terme :

$$\begin{aligned}
\text{div } [H(\nabla\psi_p + p)] &= \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} [H(\nabla\psi_p + p)]_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i} \left[H_{ij}\left(\partial_{x_j}\psi_p + p_j\right)\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} H_{ij}\partial^2_{x_i,x_j}\psi_p + \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_i}\left(\partial_{x_j}\psi_p + p_j\right) \\
&= 0 + \sum_{j=1}^{d} b_j\left(\partial_{x_j}\psi_p + p_j\right) \\
&= b \cdot (\nabla\psi_p + p).
\end{aligned}$$

L'équation du correcteur est donc

$$-\mathrm{div}\ \left[A\left(\nabla\psi_p + p\right)\right] + b\cdot\left(\nabla\psi_p + p\right) = 0.$$

12b. On calcule maintenant $K^\star$ en fonction de A, b et ψ_p : pour tout $p \in \mathbb{R}^d$, on a

$$K^\star p = \int_Q K(\nabla\psi_p + p) = \int_Q A(\nabla\psi_p + p) - \int_Q H(\nabla\psi_p + p).$$

On calcule le dernier terme. Comme H est à moyenne nulle, on a $\int_Q Hp = 0$. De plus, pour tout vecteur de base e_j,

$$e_j \cdot \int_Q H\nabla\psi_p = \sum_{i=1}^d \int_Q H_{ji}\partial_{x_i}\psi_p = -\sum_{i=1}^d \int_Q \psi_p\partial_{x_i}H_{ji} = \sum_{i=1}^d \int_Q \psi_p\partial_{x_i}H_{ij} = \int_Q \psi_p b_j,$$

donc $\int_Q H\nabla\psi_p = \int_Q \psi_p b$. La matrice homogénéisée est donc donnée par

$$K^\star p = \int_Q A(\nabla\psi_p + p) - \int_Q \psi_p b.$$