Problèmes multiéchelles : aspects théoriques et numériques (M2 ANEDP, Paris 6)

Examen du 6 janvier 2017

documents autorisés – durée 3h

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et régulier, et soit une fonction $f \in L^2(\Omega)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on se donne un champ de matrices symétriques $A_\varepsilon \in (L^\infty(\Omega))^{d\times d}$, et on suppose qu'il existe $M \geq m > 0$ tels que, pour tout ε et presque partout sur Ω,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^T A_\varepsilon(x)\xi \geq m\, \xi^T \xi \quad \text{et} \quad \|A_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M. \tag{1}$$

On se donne aussi un champ de vecteurs $b_\varepsilon \in (L^\infty(\Omega))^d$ vérifiant

$$\text{div } b_\varepsilon = 0. \tag{2}$$

Le (petit) paramètre ε encode la distance caractéristique de variation de A_ε et b_ε. On pourra penser (mais pas uniquement) au cas où $A_\varepsilon(x) = A(x/\varepsilon)$ et $b_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\, b(x/\varepsilon)$ où A (respectivement b) est un champ de matrices (respectivement de vecteurs) fixé.

L'objectif de ce problème est d'étudier l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div }\left(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\right) + b_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon & = & f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3}$$

lorsque le paramètre $\varepsilon > 0$ tend vers 0.

Les 4 parties ci-dessous sont essentiellement indépendantes.

1 Estimations a priori

Question 1a. On considère la forme bilinéaire

$$a_\varepsilon(u, w) = \int_\Omega (\nabla w)^T A_\varepsilon \nabla u + (b_\varepsilon \cdot \nabla u) w \tag{4}$$

définie pour tout u et w dans $H^1_0(\Omega)$. Montrer que

$$\forall w \in H^1_0(\Omega), \qquad a_\varepsilon(w, w) = \int_\Omega (\nabla w)^T A_\varepsilon \nabla w, \tag{5}$$

puis qu'il existe $\alpha > 0$ indépendant de ε tel que, pour tout ε, on a

$$\forall w \in H^1_0(\Omega), \qquad a_\varepsilon(w, w) \geq \alpha \|w\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{6}$$

Question 1b. Ecrire la formulation variationnelle associée à (3) sous la forme

$$\forall w \in H^1_0(\Omega), \qquad a_\varepsilon(u_\varepsilon, w) = \ell(w) \tag{7}$$

pour une certaine forme linéaire ℓ qu'on précisera. Montrer qu'il existe un unique $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ solution de (3).

Question 1c. Montrer qu'il existe une constante C, indépendante de ε, telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C. \tag{8}$$

Question 1d. Montrer par un exemple simple que $\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)}$ est a priori d'ordre $1/\varepsilon$ (on rappelle que ε correspond à la distance caractéristique de variation de A_ε et b_ε).

2 Estimation d'erreur générale

Soit u_ε^H la solution numérique obtenue par une approche de type Galerkin conforme sur le problème (3). Plus précisement, on se donne un espace de dimension finie W_H, on suppose que $W_H \subset H_0^1(\Omega)$ (l'approche est donc conforme) et on introduit $u_\varepsilon^H \in W_H$ solution de

$$\forall w \in W_H, \qquad a_\varepsilon(u_\varepsilon^H, w) = \ell(w). \tag{9}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que

$$\begin{aligned} &\left|u_\varepsilon - u_\varepsilon^H\right|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \inf_{v_H \in W_H} \left(\sqrt{\frac{M}{m}}\, |u_\varepsilon - v_H|_{H^1(\Omega)} + \frac{\left\| \sqrt{b_\varepsilon^T (A_\varepsilon)^{-1} b_\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{m}}\, \|u_\varepsilon - v_H\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned} \tag{10}$$

où on a utilisé la notation $|v|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$.

Question 2a. En utilisant (5), montrer que, pour tout $v_H \in W_H$, on a

$$\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H) = a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H, u_\varepsilon - v_H). \tag{11}$$

Question 2b. En utilisant la matrice $(A_\varepsilon)^{1/2}$ (matrice vérifiant $(A_\varepsilon^T)^{1/2}(A_\varepsilon)^{1/2} = A_\varepsilon$, et dont l'existence est garantie par la symétrie de A_ε), montrer que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - v_H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H) \\ &\leq \left[\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]^{1/2} \left[\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - v_H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - v_H)\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Question 2c. En utilisant le fait que $(A_\varepsilon^T)^{-1/2}(A_\varepsilon)^{1/2} = I_d$, montrer que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[b_\varepsilon \cdot \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right](u_\varepsilon - v_H) \\ &\qquad \leq \left[\int_\Omega b_\varepsilon^T (A_\varepsilon)^{-1} b_\varepsilon\, (u_\varepsilon - v_H)^2\right]^{1/2} \left[\int_\Omega \left[\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]^T A_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^H)\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Question 2d. En utilisant les Questions 2a, 2b et 2c, montrer que, pour tout $v_H \in W_H$,

$$\sqrt{m}\, \left|u_\varepsilon - u_\varepsilon^H\right|_{H^1(\Omega)} \\ \leq \sqrt{M}\, |u_\varepsilon - v_H|_{H^1(\Omega)} + \left\| \sqrt{b_\varepsilon^T (A_\varepsilon)^{-1} b_\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_\varepsilon - v_H\|_{L^2(\Omega)}. \quad (14)$$

Déduire (10).

Question 3. On suppose dans cette question uniquement qu'on cherche à approcher u_ε par une méthode d'éléments finis P1 sur un maillage de taille H, et que $\|b_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ où M est indépendant de ε. En utilisant la Question 1d et l'estimation (10), donner une estimation d'erreur sur $\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^H\|_{H^1(\Omega)}$ où la dépendance en H et en ε est explicite. Pour obtenir une approximation précise, quelle contrainte doivent satisfaire H et ε ?

3 Une approche du type Elements finis multi-échelles

On propose ici une méthode numérique adaptée au problème (3) qui ne souffre pas de la contrainte identifiée à la Question 3.

Pour cette partie, on se place en dimension $d = 1$, on suppose que $\Omega = (0, 1)$, et on introduit l'opérateur

$$\mathcal{L}_\varepsilon u := -[A_\varepsilon u']' + b_\varepsilon u'$$

où A_ε et b_ε sont des fonctions à valeurs scalaires vérifiant les hypothèses (1) et (2). Le problème de référence (i.e., le problème (3) en dimension un) s'écrit alors

$$\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon = f, \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0.$$

La formulation faible associée consiste à

$$\text{Trouver } u_\varepsilon \in H_0^1(0,1) \text{ tel que, pour tout } v \in H_0^1(0,1), \quad a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \ell(v), \quad (15)$$

avec

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_0^1 A_\varepsilon u'v' + \int_0^1 b_\varepsilon u'v \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_0^1 fv.$$

On introduit les noeuds $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_I = 1$, qui définissent les éléments $K_i = [x_{i-1}, x_i]$. On note $H = \max\limits_{1 \leq i \leq I} |x_i - x_{i-1}|$ la taille du maillage. Plutôt que de travailler avec un espace classique d'éléments finis pour approcher la solution de (15), on va travailler avec l'espace multi-échelle

$$W_H = \big\{ v \in C^0(0,1),\ v(0) = v(1) = 0, \\ v \in H^1(K_i) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq I,\ \mathcal{L}_\varepsilon v = 0 \text{ sur chaque } K_i \big\}.$$

La solution numérique u_ε^H est encore définie par (9).

Question 4. Montrer que $W_H \subset H^1_0(0,1)$.

Question 5. On va maintenant estimer $\|u_\varepsilon - v_H\|_{H^1(\Omega)}$ pour un choix particulier de fonction $v_H \in W_H$. On introduit l'interpolant $v_H = R_H u_\varepsilon$ de u_ε dans W_H, c'est à dire la fonction $v_H \in W_H$ telle que $v_H(x_i) = u_\varepsilon(x_i)$ pour tout $0 \leq i \leq I$.

5a. On introduit l'erreur d'interpolation $e = u_\varepsilon - v_H$. Montrer que, sur chaque élément K_i, on a

$$\mathcal{L}_\varepsilon e = f \quad \text{avec} \quad e(x_{i-1}) = e(x_i) = 0.$$

5b. Montrer que

$$m|e|^2_{H^1(\Omega)} \leq a_\varepsilon(e,e) = \sum_{i=1}^{I} \int_{x_{i-1}}^{x_i} A_\varepsilon |e'|^2 + \int_{x_{i-1}}^{x_i} b_\varepsilon \, e' \, e \tag{16}$$

puis, par une intégration par partie, que

$$m|e|^2_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{I} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\, e. \tag{17}$$

5c. On rappelle (cf. la Question 8 ci-dessous) que

$$\forall \widetilde{e} \in H^1_0(x_{i-1}, x_i), \quad \|\widetilde{e}\|_{L^2(K_i)} \leq CH \|\widetilde{e}'\|_{L^2(K_i)} \tag{18}$$

où C est une constante universelle. Déduire de (17) que

$$|e|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C\,H}{m} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{19}$$

5d. Montrer que

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C^2\,H^2}{m} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Question 6. En utilisant (10), montrer que

$$\left| u_\varepsilon - u_\varepsilon^H \right|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\mathcal{C} H}{m} \left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \frac{\|b_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}}{m} H \right) \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{20}$$

où $\mathcal{C}$ est une constante universelle.

Question 7. En dimension $d = 1$, l'hypothèse (2) implique que b_ε est constant. En dimension d quelconque, si $b_\varepsilon = n_\varepsilon\, b$ pour $b \in \mathbb{R}^d$ constant non nul et $n_\varepsilon \in]0, \infty[$ avec $n_\varepsilon \to \infty$, alors on peut montrer que la solution u_ε de (3) converge (faiblement dans $H^1_0(\Omega)$) vers 0, ce qui rend le problème peu intéressant. On suppose donc ici que $|b_\varepsilon| \leq M$ où M est indépendant de ε.

Qu'implique alors le résultat de la Question 6 ? Comparer cette estimation avec celle obtenue à la Question 3.

Question 8. Montrer (18).

4 Un résultat d'homogénéisation

On considère le problème (3) dans un cadre périodique, en dimension d. On a vu à la Question 1c que u_ε est borné dans $H^1(\Omega)$. On sait donc qu'il existe $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ tel que, à extraction près, u_ε converge (faiblement dans $H^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$) vers u_0. L'objectif de cette partie est d'identifier u_0.

On note $Q = [0,1]^d$ le cube unité de $\mathbb{R}^d$, et on suppose que

$$A_\varepsilon(x) = A(x/\varepsilon) \quad \text{et} \quad b_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\, b(x/\varepsilon)$$

où A (respectivement b) est un champ de matrices (respectivement de vecteurs) fixé et Q-périodique, au sens où, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a $A(y+k) = A(y)$ (respectivement $b(y+k) = b(y)$). On suppose que, presque partout sur $\mathbb{R}^d$,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^T A(y) \xi \geq m\, \xi^T \xi \quad \text{et} \quad \|A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq M, \tag{21}$$

si bien que l'hypothèse (1) est satisfaite. On suppose aussi $b \in (L^\infty(\mathbb{R}^d))^d$ avec

$$\text{div } b = 0, \tag{22}$$

si bien que l'hypothèse (2) est satisfaite. On suppose de plus que b est à moyenne nulle :

$$\int_Q b = 0. \tag{23}$$

On admet le résultat de structure suivant : sous les hypothèses précédentes sur b, il existe un champ de matrices H tel que

$$\forall 1 \leq j \leq d, \qquad b_j(y) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_i}(y) \tag{24}$$

avec H anti-symétrique ($H_{ij} = -H_{ji}$), Q-périodique et de moyenne nulle sur Q. On supposera dans la suite que b est assez régulier pour que $H \in (L^\infty(\mathbb{R}^d))^{d\times d}$.

Question 9. Soit $K = A - H \in (L^\infty(\mathbb{R}^d))^{d\times d}$ et soit $K_\varepsilon(x) = K(x/\varepsilon)$. Montrer que la solution u_ε de (3) vérifie

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div } (K_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) & = & f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon & = & 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{25}$$

Question 10. Montrer que la matrice K vérifie une hypothèse de type (21). En déduire que (25) est bien posé et que les problèmes (3) et (25) sont équivalents.

Question 11. Pour tout $p \in \mathbb{R}^d$, on introduit la fonction $\psi_p \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, définie sur $\mathbb{R}^d$, Q-périodique et vérifiant

$$-\text{div } \left[K\left(\nabla \psi_p + p\right)\right] = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^d. \tag{26}$$

En supposant toute la régularité nécessaire sur K et ψ_p, écrire un résultat d'homogénéisation pour le problème (25), i.e. montrer que u_ε converge (en un sens qu'on précisera) vers u_0 solution de

$$\left\{ \begin{aligned} -\text{div } (K^\star \nabla u_0) &= f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u_0 &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \right. \tag{27}$$

où on donnera l'expression de $K^\star$ en fonction de K et de ψ_p.

Question 12. On cherche maintenant à écrire le résultat d'homogénéisation en fonction de A et b plutot que K.

12a. Ecrire l'équation (26) en fonction de A et b plutot qu'en fonction de K.

12b. Donner l'expression de $K^\star$ en fonction de A, b et ψ_p.