Problèmes multiéchelles : aspects théoriques et numériques (M2 ANEDP, Paris 6)

Examen du 8 janvier 2019

documents autorisés – durée 3h

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et régulier. L'objectif de ce problème est d'étudier l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}\left[A\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right] + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\,\sigma\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon & = & 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon(t,\cdot) & \in & H^1_0(\Omega), \end{array} \right. \tag{1}$$

avec la condition initiale $u_\varepsilon(t=0) = u^{\rm ini}$, où $u^{\rm ini} \in H^1_0(\Omega)$ est une fonction donnée.

On suppose que le champ de matrices A est symétrique, périodique, bornée et elliptique. On a donc $A \in (L^\infty(\mathbb{R}^d))^{d\times d}$ et

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \ \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad A(y+k) = A(y).$$

On suppose aussi qu'il existe $M \geq m > 0$ tels que

$$\|A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq M \quad \text{et} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^T A(y) \xi \geq m\, \xi^T \xi. \tag{2}$$

On suppose que la fonction σ est périodique, bornée et isolée de 0. On a donc $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \ \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma(y+k) = \sigma(y),$$

et on suppose de plus que σ vérifie

$$\|\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq M \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma(y) \geq m > 0. \tag{3}$$

On admet que (1) est bien posé dans $H^1_0(\Omega)$. On s'intéresse à des solutions de la forme

$$u_\varepsilon(t,x) = \exp(-\lambda\, t/\varepsilon^2)\, v_\varepsilon(t,x) \tag{4}$$

où λ est une constante (pour l'instant inconnue) indépendante de ε.

Question 1. Ecrire l'équation vérifiée par v_ε.

1 Développement à deux échelles

Question 2. On introduit un développement à deux échelles pour la fonction v_ε sous la forme

$$v_\varepsilon(t,x) = v_0\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 v_2\left(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots, \tag{5}$$

où chaque fonction v_i est supposée indépendante de ε et périodique de la troisième variable : pour tout $t > 0$ et tout $x \in \Omega$,

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \ \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad v_i(t,x,y+k) = v_i(t,x,y).$$

Ecrire les trois premières équations de la hierarchie correspondante. Dans toute la suite, on notera x la variable lente et $y = x/\varepsilon$ la variable rapide.

1.1 Equation d'ordre ε^{-2}

Question 3. On considère la fonctionnelle quadratique

$$F(\psi) = \frac{1}{2}\int_Q (\nabla\psi(y))^T A(y)\nabla\psi(y) + \frac{1}{2}\int_Q \sigma(y)\,\psi(y)^2,$$

où $Q = \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[^d$ est le cube unité de $\mathbb{R}^d$.

Question 3a. Démontrer que cette fonctionnelle est bien définie, continue et convexe sur l'espace H^1_{per} défini par

$$H^1_{\mathrm{per}} = \left\{\psi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \ \text{ tel que } \ \psi(y+k) = \psi(y) \ \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}^d \text{ et } y \in \mathbb{R}^d\right\}.$$

Question 3b. On considère le problème de minimisation

$$\inf\left\{F(\psi), \quad \psi \in H^1_{\mathrm{per}}, \quad \int_Q \psi^2 = 1\right\}. \tag{6}$$

Démontrer que ce problème admet une solution. On la note ψ_0.

Question 3c. On rappelle que, pour tout $\psi \in H^1_{\mathrm{per}}$, on a $|\psi| \in H^1_{\mathrm{per}}$ avec $\nabla|\psi| = \mathrm{sign}(\psi)\,\nabla\psi$ où sign est la fonction signe : $\mathrm{sign}(\psi) = 1$ si $\psi > 0$, $\mathrm{sign}(\psi) = -1$ si $\psi < 0$ et $\mathrm{sign}(\psi) = 0$ si $\psi = 0$.

Montrer que, pour tout $\psi \in H^1_{\mathrm{per}}$, on a $F(|\psi|) = F(\psi)$. En déduire qu'on peut supposer dans la suite que $\psi_0(y) \geq 0$ sur Q.

On admet pour toute la suite que ψ_0 est isolée de 0. Quitte à changer la valeur de m dans (2) et (3), on a donc

$$\forall y \in Q, \quad \psi_0(y) \geq m > 0. \tag{7}$$

Question 3d. Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème (6). On note λ_0 le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\displaystyle\int_Q \psi^2 = 1$ dans (6). Montrer que $\lambda_0 > 0$.

On admet dans la suite que, pour λ_0 fixé, cette équation admet une unique solution dans H^1_{per} à une constante multiplicative près.

Dans toute la suite, on choisit la constante λ dans (4) égale à λ_0 : $\lambda := \lambda_0$.

Question 4. Montrer que la solution de la première équation de la hiérarchie obtenue à la Question 2 (celle en ε^{-2}) est donnée par

$$v_0(t,x,y) = v^\star(t,x)\,\psi_0(y)$$

où $v^\star$ est indépendante de y.

1.2 Equation d'ordre ε^{-1}

On suppose dans la suite que

$$A \in (W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))^{d\times d}. \tag{8}$$

On introduit l'espace L^2_{per} défini par

$$L^2_{\text{per}} = \left\{ f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \;\; \text{tel que} \;\; f(y+k) = f(y) \;\; \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}^d \text{ et } y \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Question 5. Montrer que la deuxième équation de la hiérarchie obtenue à la Question 2 (celle en ε^{-1}) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} -\text{div}_y \left[A(y)\nabla_y v_1(t,x,y)\right] + (\sigma(y) - \lambda_0)\, v_1(t,x,y) = G(t,x,y), \\ y \in Q \mapsto v_1(t,x,y) \;\; \text{est périodique, pour tout } (t,x) \text{ fixé}, \end{array} \right. \tag{9}$$

avec

$$G(t,x,y) = (\nabla_x v^\star(t,x))^T A(y)\nabla_y \psi_0(y) + \text{div}_y \left[\psi_0(y)\, A(y)\nabla_x v^\star(t,x)\right]. \tag{10}$$

Question 6. Soit $g \in L^2_{\text{per}}$. On s'intéresse au problème

$$\text{Chercher } w \in H^1_{\text{per}} \text{ tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\text{div}(A\nabla w) + (\sigma - \lambda_0)\, w = g, \\ y \in Q \mapsto w(y) \;\; \text{est périodique.} \end{array} \right. \tag{11}$$

Question 6a. Montrer que le théorème de Lax-Milgram ne suffit pas pour étudier (11).

Question 6b. Montrer que, si le problème (11) a une solution, alors nécessairement

$$\int_Q g\, \psi_0 = 0. \tag{12}$$

Question 7. Pour étudier (11), on rappelle le résultat suivant :

Théorème 1 (Alternative de Fredholm)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $L : H \to H$ un opérateur compact et auto-adjoint. Soit I_H l'identité dans H. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, les espaces Ker $(L - \lambda I_H)$ et Im $(L - \lambda I_H)$ sont supplémentaires orthogonaux :*

- *Tout $x \in H$ se décompose de manière unique sous la forme $x = x_K + x_I$ avec $x_K \in$ Ker $(L - \lambda I_H)$ et $x_I \in$ Im $(L - \lambda I_H)$.*
- *L'intersection de Ker $(L - \lambda I_H)$ avec Im $(L - \lambda I_H)$ est réduite à $\{0\}$.*
- *Pour tout $x_K \in$ Ker $(L - \lambda I_H)$ et $x_I \in$ Im $(L - \lambda I_H)$, on a $\langle x_K, x_I\rangle_H = 0$, où $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ est le produit scalaire sur H.*

Question 7a. Montrer que, pour tout $f \in L^2_{\text{per}}$, le problème

$$-\text{div}(A\nabla u) + \sigma\, u = f \tag{13}$$

admet une unique solution dans H^1_{per}. Ceci permet d'introduire l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} L : L^2_{\text{per}} & \to & L^2_{\text{per}} \\ f & \mapsto & u \quad \text{solution de (13).} \end{array}$$

Montrer que L vérifie les hypothèses de l'alternative de Fredholm pour un espace de Hilbert H qu'on explicitera. On justifiera donc que L est bien compact et auto-adjoint.

Question 7b. Montrer que le problème (11) est équivalent à

$$\text{Chercher } w \in H \text{ tel que } \left(L - \frac{1}{\lambda_0} I_H \right) w = -\frac{1}{\lambda_0} Lg, \tag{14}$$

où L (resp. H) est l'opérateur construit (resp. l'espace identifié) dans la Question 7a.

Question 7c. Montrer que $\mathrm{Ker} \left(L - \frac{1}{\lambda_0} I_H \right)$ est exactement l'espace vectoriel engendré par ψ_0.

Question 7d. Montrer que, si g vérifie (12), alors $Lg \in \mathrm{Im} \left(L - \frac{1}{\lambda_0} I_H \right)$.

Question 7e. Montrer que (11) admet une solution w si et seulement si g vérifie (12). Montrer que, dans ce cas, les solutions sont de la forme $w + c\psi_0$, où c est une constante.

Question 8. On a maintenant tous les éléments pour résoudre (9).
Question 8a. Montrer que la fonction G définie par (10) vérifie

$$G(t, x, y) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v^\star}{\partial x_i}(t, x) \, g_i(y)$$

où g_i est une fonction indépendante de (t, x), vérifiant $g_i \in L^2_{\mathrm{per}}$, et qu'on identifiera.

Question 8b. Montrer que, pour tout $1 \le i \le d$, il existe $w_i \in H^1_{\mathrm{per}}$ tel que (11) est satisfait pour le second membre g_i identifié dans la Question 8a, c'est à dire qu'il existe $w_i \in H^1_{\mathrm{per}}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathrm{div}(A \nabla w_i) + (\sigma - \lambda_0) \, w_i = g_i, \\ y \in Q \mapsto w_i(y) \ \text{ est périodique.} \end{array} \right. \tag{15}$$

Question 8c. En déduire que l'ensemble des solutions de (9) est de la forme

$$v_1(t, x, y) = \tau(t, x) \, \psi_0(y) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v^\star}{\partial x_i}(t, x) \, w_i(y)$$

où τ est une fonction indépendante de y.

1.3 Equation d'ordre ε^0

On s'intéresse maintenant à la troisième équation de la hiérarchie obtenue à la Question 2 (celle en ε^0).

Question 9. En multipliant cette équation par ψ_0 et en intégrant par rapport à $y \in Q$, montrer que $v^\star$ vérifie

$$\frac{\partial v^\star}{\partial t} - \operatorname{div}\left[A^\star \nabla v^\star\right] = 0 \tag{16}$$

où la matrice homogénéisée $A^\star$ est donnée par

$$\forall 1 \leq i \leq d, \quad A^\star e_i = \int_Q \psi_0^2(y)\, A(y) \left[e_i + \nabla \left(\frac{w_i}{\psi_0}\right)\right],$$

où e_i est le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Question 10. On discute maintenant la condition initiale et la condition aux limites de (16).

Question 10a. En utilisant le développement à deux échelles (5), montrer que $v^\star(t,x) = 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$.

Question 10b. Peut on déduire de (5) et des résultats précédents un résultat concernant la condition initiale $v^\star(t=0,x)$? Qu'est-ce que cela laisse penser pour ce qui concerne la validité de l'approximation de v_ε par les premiers termes du développement à deux échelles ?

Question 11. On établie ici des propriétés utiles sur $A^\star$.

Question 11a. Vérifier que les correcteurs w_i solutions de (15) sont aussi solutions du problème

$$\left\{\begin{array}{l} -\operatorname{div}\left[\psi_0^2\, A \left(e_i + \nabla\left(\dfrac{w_i}{\psi_0}\right)\right)\right] = 0, \\ y \in Q \mapsto w_i(y) \ \text{ est périodique.} \end{array}\right. \tag{17}$$

Question 11b. Montrer que la matrice $A^\star$ est symétrique.

Question 11c. Montrer que la matrice $A^\star$ est définie positive, au sens où il existe $c_- > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a $\xi^T A^\star \xi \geq c_-\, \xi^T \xi$.

1.4 Retour sur le choix $\lambda = \lambda_0$

Question 12. A partir de la Question 4, on a supposé que la constante λ dans (4) est choisie égale à λ_0. Que se passe-t-il si on fait un autre choix ? On pourra se rappeler qu'un opérateur $L : H \to H$ autoadjoint et compact (où H est un espace de Hilbert) est diagonalisable.

2 Discrétisation

On s'intéresse maintenant à la discrétisation (en temps et en espace) de l'équation vérifiée par v_ε (identifiée à la Question 1). On suppose qu'on a choisi $\lambda := \lambda_0$ dans (4) (où λ_0 est défini par la Question 3d) et que λ_0 est connu.

Question 13. On utilise un pas de temps fixe Δt et on note $v_\varepsilon^n \in H_0^1(\Omega)$ une approximation de $v_\varepsilon(t = n\Delta t, \cdot)$. En utilisant une discrétisation implicite en temps, montrer qu'on se ramène à la résolution de

$$-\operatorname{div}\left[A_\varepsilon \nabla \chi_\varepsilon\right] + \mu_\varepsilon\, \chi_\varepsilon = f \ \text{ dans } \Omega, \quad \chi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \tag{18}$$

avec $A_\varepsilon(x) = A(x/\varepsilon)$ et $\mu_\varepsilon(x) = \dfrac{\sigma(x/\varepsilon) - \lambda_0}{\varepsilon^2} + \dfrac{1}{\Delta t}$. On précisera la valeur de f et de χ_ε en fonction de v_ε^n, v_ε^{n+1} et Δt.

On suppose dans la suite que Δt est assez petit pour que $\mu_\varepsilon(x) \geq 0$ sur Ω.

Question 14. Ecrire la formulation variationnelle satisfaite par χ_ε et vérifier que (18) est bien posée.

Question 15. Pour résoudre (18), on met en place une méthode d'éléments finis multi-échelles. On se donne donc un maillage $\mathcal{T}_H$ de Ω, de pas $H \gg \varepsilon$, et on introduit les fonctions éléments finis P1 usuelles, qu'on note ϕ_j^0, où $1 \leq j \leq J$ est l'indice du noeud du maillage. Proposer une base d'éléments finis multi-échelles ϕ_j^ε.

Question 16. On se place en dimension $d = 1$ d'espace et on suppose que $\Omega =]0, 1[$. On introduit la norme énergétique $\|u\|_E$ définie par

$$\|u\|_E^2 = \int_\Omega (\nabla u)^T A_\varepsilon \nabla u + \int_\Omega \mu_\varepsilon \, u^2.$$

On note χ_ε^H l'approximation MsFEM de χ_ε. Etablir une estimation d'erreur sur $\|\chi_\varepsilon - \chi_\varepsilon^H\|_E$, puis montrer que

$$\|\chi_\varepsilon - \chi_\varepsilon^H\|_{H^1(\Omega)} \leq C \, H \, \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

où C est indépendant de f, H et ε.