Homogénéisation: preuve par la méthode des fonctions test hautement oscillantes

F. Legoll

8 février 2015

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et régulier, et soit une fonction $f \in L^2(\Omega)$. On se donne une matrice symétrique $A(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, bornée et uniformément coercive, au sens où il existe $m > 0$ et $M < \infty$ tels que, presque partout sur $\mathbb{R}^d$,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad |A(x)| \leq M \quad \text{et} \quad \xi^T A(x) \xi \geq m \, \xi^T \xi.$$

On note $Q = [0,1]^d$ le cube unité. On suppose que la matrice A est Q-périodique, au sens où, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, on a $A(x+k) = A(x)$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

Soit $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ l'unique solution du problème hautement oscillant

$$-\text{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f \ \text{ dans } \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \tag{1}$$

1 Estimations a priori

La formulation variationnelle du problème (1) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1_0(\Omega), \quad a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = b(v) \end{array} \right. \tag{2}$$

avec

$$a_\varepsilon(u,v) = \int_\Omega (\nabla v(x))^T A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u(x)\, dx \quad \text{et} \quad b(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx.$$

En prenant $v = u_\varepsilon$ dans (2), on montre qu'il existe une constante C, indépendante de ε, telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

En utilisant le théorème de Rellich, on déduit donc qu'il existe $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ et une suite extraite $u_{\varepsilon'}$ tels que

$$\lim_{\varepsilon' \to 0} \|u_{\varepsilon'} - u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{3}$$

2 Fonctions test oscillantes

Soit i un entier, $1 \leq i \leq d$. On rappelle qu'il existe une fonction $w_i \in H^1(Q)$, définie sur $\mathbb{R}^d$, Q-périodique, et vérifiant

$$-\text{div}\left[A(y)\left(\nabla w_i(y) + e_i\right)\right] = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \tag{4}$$

où e_i est le i-ième vecteur de base de $\mathbb{R}^d$. On rappelle aussi que la solution de cette équation est unique (à une constante additive près).

Remarque 1. *Tout ceci peut être démontré rigoureusement en considérant la formulation variationelle suivante :*

$$\text{Chercher } w \in V \text{ tel que, pour tout } v \in V, \quad \int_Q (\nabla v)^T A (\nabla w + e_i) = 0 \tag{5}$$

avec

$$V = \left\{ w \in H^1_{\mathrm{per}}(Q), \quad \int_Q w = 0 \right\},$$

où

$$L^2_{\mathrm{per}}(Q) = \left\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d, \ u(x+k) = u(x) \text{ presque partout} \right\}$$

et

$$H^1_{\mathrm{per}}(Q) = \left\{ u \in L^2_{\mathrm{per}}(Q), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2_{\mathrm{per}}(Q) \text{ pour tout } 1 \le i \le d \right\}.$$

On rappelle que V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_Q u\, v + \int_Q \nabla u \cdot \nabla v.$$

Toute l'idée de la preuve consiste à considérer la fonction

$$v(x) := \varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^d \partial_i \varphi(x) \ w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

dans la formulation variationnelle (2), où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est une fonction fixée.

Remarque 2. *Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a bien que $v \in H^1_0(\Omega)$: c'est bien une fonction admissible dans* (2)*.*

En écrivant donc (2) avec le choix ci-dessus de v, on montre que

$$c_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) + r_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) = b(\varphi) + s_\varepsilon(\varphi),$$

avec, pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
c_\varepsilon(u, \varphi) &= \int_\Omega (\nabla \varphi(x))^T A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u(x)\, dx + \sum_{i=1}^d \int_\Omega \partial_i \varphi(x) \left(\nabla w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^T A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u(x)\, dx, \\
r_\varepsilon(u, \varphi) &= \varepsilon \sum_{i=1}^d \int_\Omega w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (\partial_i \nabla \varphi(x))^T A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u(x)\, dx, \\
s_\varepsilon(\varphi) &= \varepsilon \sum_{i=1}^d \int_\Omega f(x)\, \partial_i \varphi(x)\, w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx.
\end{aligned}$$

2.1 Passage à la limite, les deux termes faciles

On montre sans difficulté que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s_\varepsilon(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} r_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) = 0.$$

2.2 Passage à la limite, le terme difficile

Il n'est pas évident de passer à la limite $\varepsilon \to 0$ dans $c_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi)$, car cette quantité dépend naturellement de ∇u_ε, qui ne converge que faiblement.

Cependant, par intégration par partie, et en utilisant (4), on remarque que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} c_\varepsilon(u, \varphi) &= \sum_{i=1}^d \int_\Omega (\nabla u(x))^T A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(e_i + \nabla w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\partial_i \varphi(x)\, dx \\ &= -\sum_{i=1}^d \int_\Omega u(x)\left[A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(e_i + \nabla w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right]\cdot \partial_i \nabla\varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

On voit donc que $c_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi)$ peut en fait s'écrire à l'aide de u_ε, qui converge *fortement* (à la différence de ∇u_ε).

Pour passer à la limite, on utilise le lemme de moyenne des fonctions périodiques :

Lemme 1. *Soit $B(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, à valeur dans $\mathbb{R}^d$, Q-périodique, avec $B \in (L^2(Q))^d$. Pour tout $\chi \in (L^2(\Omega))^d$, on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega B\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot \chi(x)\, dx = \langle B\rangle \cdot \int_\Omega \chi(x)\, dx,$$

avec $\langle B\rangle = \int_Q B(y)\, dy$.

On déduit donc que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon(u, \varphi) = c(u, \varphi),$$

avec

$$c(u, \varphi) = -\sum_{i=1}^d \int_\Omega u(x)\left[A^\star e_i\right]\cdot \partial_i\nabla\varphi(x)\, dx,$$

où la matrice $A^\star$ est définie par, pour tout i,

$$A^\star e_i = \int_Q A(y)\left(e_i + \nabla w_i(y)\right)\, dy. \tag{6}$$

Par ailleurs, pour tout u et v dans $H_0^1(\Omega)$, et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$|c_\varepsilon(u, \varphi) - c_\varepsilon(v, \varphi)| \le C\, \|u - v\|_{L^2(\Omega)},$$

où C est une constante indépendante de ε, u et v.

En utilisant (3), on déduit donc que

$$\lim_{\varepsilon'\to 0} c_{\varepsilon'}(u_{\varepsilon'}, \varphi) = c(u_0, \varphi).$$

3 Conclusion

En utilisant ce qui précède, on voit donc que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ est tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$c(u_0, \varphi) = b(\varphi).$$

Or, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$c(u_0, \varphi) = \int_\Omega (\nabla \varphi)^T A^\star \nabla u_0.$$

Donc u_0 est solution du problème

$$-\mathrm{div}\,(A^\star \nabla u_0) = f \quad \text{dans } \Omega, \qquad u_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{7}$$

On va montrer ci-dessous que $A^\star$ est coercive, au sens où il existe $m^\star > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^T A^\star \xi \geq m^\star \, \xi^T \xi. \tag{8}$$

Ceci implique que (7) a une unique solution. Par conséquent, toutes les suites extraites de u_ε convergent vers la même fonction u_0, ce qui implique que *toute* la suite u_ε converge (dans $L^2(\Omega)$) vers u_0 solution de (7).

On démontre maintenant (8). Soit $p \in \mathbb{R}^d$. D'après (6), on voit que

$$A^\star p = \int_Q A\,(p + \nabla w_p)\,,$$

où la fonction $w_p \in H^1(Q)$, définie sur $\mathbb{R}^d$, Q-périodique, vérifie

$$-\mathrm{div}\,[A\,(\nabla w_p + p)] = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d.$$

Donc

$$p^T A^\star p = \int_Q p^T A\,(p + \nabla w_p)\,.$$

En utilisant la formulation variationnelle (5) définissant w_p, on voit que

$$\int_Q (\nabla w_p)^T A\,(p + \nabla w_p) = 0.$$

On obtient donc que

$$\begin{aligned} p^T A^\star p &= \int_Q (p + \nabla w_p)^T A\,(p + \nabla w_p) \\ &\geq m \int_Q (p + \nabla w_p)^T\,(p + \nabla w_p) \\ &\geq m \left| \int_Q (p + \nabla w_p) \right|^2 \\ &= m, \end{aligned}$$

où on a utilisé une inégalité de Cauchy-Schwarz à la troisième ligne. Ceci démontre (8).