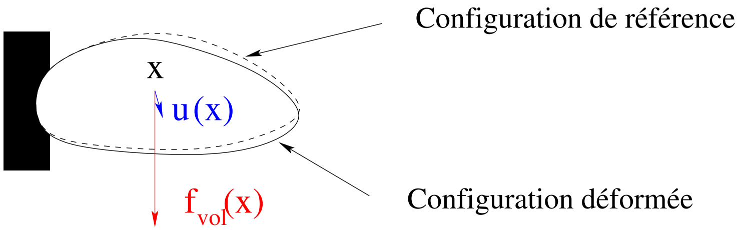
Introduction à la mécanique du solide

et à l'élasticité

Frédéric Legoll (ENPC)

Cours M2 – Problèmes multiéchelles – 24 novembre 2020

Modèle



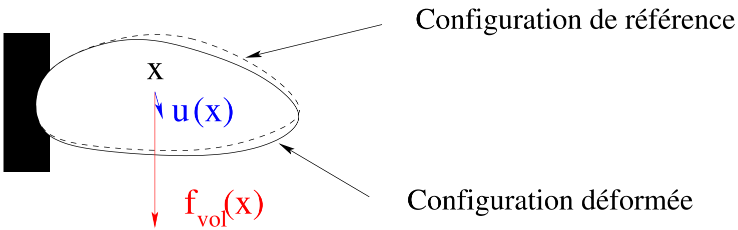
En élasticité, l'inconnue est le déplacement

$$u : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est la configuration de référence (volume occupé par le matériau en l'absence de toute sollicitation).

Par définition, $\varphi(x) = x + u(x)$ est la position courante (dans la configuration déformée) d'un point initialement en x.

Modèle



Exemples de sollicitation:

- force volumique $f \equiv f_{\text{vol}} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ (le poids)
- des déplacements imposés: $u = u_0$ sur $\partial\Omega$ (ou sur une partie Γ_D de $\partial\Omega$)
- des forces imposées sur $\partial\Omega$ (ou sur une partie Γ_N de $\partial\Omega$): pression de l'eau sur un solide immergé

On a $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

Modélisation énergétique

On se place dans le cas où le problème consiste à minimiser l'énergie élastique du solide. Ceci exclut:

- les problèmes dynamiques
- les problèmes dans lesquels le déplacement u ne suffit pas à caractériser l'état du matériau (endommagement, plasticité, ...)

Modélisation énergétique

On se place dans le cas où le problème consiste à minimiser l'énergie élastique du solide. Ceci exclut:

- les problèmes dynamiques
- les problèmes dans lesquels le déplacement u ne suffit pas à caractériser l'état du matériau (endommagement, plasticité, ...)

Supposons qu'on impose $u = u_0$ sur tout $\partial\Omega$. Alors le problème s'écrit sous la forme

$$\inf \left\{ E(u), \quad u \text{ assez régulier pour que } E(u) \text{ ait un sens}, \quad u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

avec

$$E(u) = \int_\Omega W(\nabla u) - \int_\Omega f \cdot u$$

Le premier terme représente l'énergie élastique stockée dans le matériau (où $W : \mathbb{R}^{d \times d} \to \mathbb{R}$ est la densité d'énergie élastique), tandis que le second terme représente l'énergie potentielle associée aux forces extérieures.

Equation d'Euler-Lagrange associée - 1

Soit $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$ assez régulier, avec $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

- $u + \alpha v$ satisfait les conditions aux limites sur $\partial\Omega$
- donc $E(u) \leq E(u + \alpha v)$

Equation d'Euler-Lagrange associée - 1

Soit $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$ assez régulier, avec $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

- $u + \alpha v$ satisfait les conditions aux limites sur $\partial\Omega$
- donc $E(u) \leq E(u + \alpha v)$

Pour α petit, on peut faire un développement limité:

$$\begin{aligned}
E(u+\alpha v) &= \int_\Omega W(\nabla u + \alpha \nabla v) - \int_\Omega f \cdot (u + \alpha v) \\
&= \int_\Omega W(\nabla u) + \alpha \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u)\,(\nabla v)_{ij} + O(\alpha^2) - \int_\Omega f \cdot (u + \alpha v) \\
&= E(u) + \alpha \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^d f_i\, v_i \right) + O(\alpha^2)
\end{aligned}$$

en prenant la convention $(\nabla v)_{ij} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

Equation d'Euler-Lagrange associée - 2

On a $E(u) \leq E(u + \alpha v)$ avec

$$E(u + \alpha v) = E(u) + \alpha \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{d} f_i \, v_i \right) + O(\alpha^2)$$

Equation d'Euler-Lagrange associée - 2

On a $E(u) \leq E(u + \alpha v)$ avec

$$E(u+\alpha v) = E(u) + \alpha \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u)\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^d f_i\, v_i \right) + O(\alpha^2)$$

donc, pour tout v assez régulier et tel que $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u)\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \int_\Omega \sum_{i=1}^d f_i\, v_i$$

Par IPP: $$- \int_\Omega \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u) \right] \right) v_i = \int_\Omega \sum_{i=1}^d f_i\, v_i$$

Equation d'Euler-Lagrange associée - 2

On a $E(u) \leq E(u+\alpha v)$ avec

$$E(u+\alpha v) = E(u) + \alpha \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u)\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^d f_i\, v_i \right) + O(\alpha^2)$$

donc, pour tout v assez régulier et tel que $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u)\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \int_\Omega \sum_{i=1}^d f_i\, v_i$$

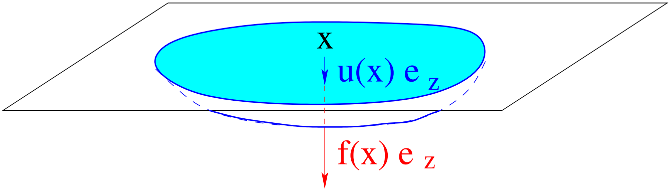
Par IPP:
$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u) \right] \right) v_i = \int_\Omega \sum_{i=1}^d f_i\, v_i$$

et donc, comme les v_i sont quelconques,

$$\forall 1 \leq i \leq d, \qquad -\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u) \right] = f_i \qquad \text{dans } \Omega$$

avec $u = u_0$ sur $\partial\Omega$

Cas particulier: le déplacement membranaire - 1

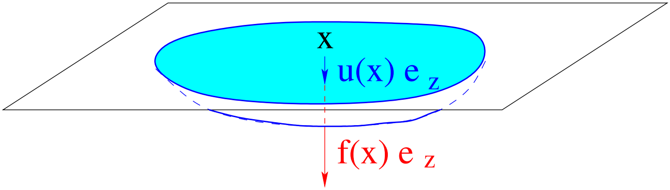


$$\underline{u}(x,y,z) = u(x,y)\,\underline{e_z}, \qquad \underline{f}(x,y,z) = f(x,y)\,\underline{e_z}$$

et

$$W(\nabla \underline{u}) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \underline{u}_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \underline{u}_z}{\partial y}\right)^2\right]$$

Cas particulier: le déplacement membranaire - 1



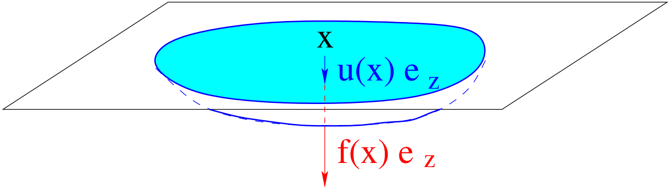
$$\underline{u}(x,y,z) = u(x,y)\,\underline{e_z}, \qquad \underline{f}(x,y,z) = f(x,y)\,\underline{e_z}$$

et

$$W(\nabla \underline{u}) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \underline{u}_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \underline{u}_z}{\partial y}\right)^2\right]$$

On a alors $\dfrac{\partial W}{\partial F_{ij}} = 0$ sauf

$$\frac{\partial W}{\partial F_{zx}}(\nabla \underline{u}) = \frac{\partial \underline{u}_z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial W}{\partial F_{zy}}(\nabla \underline{u}) = \frac{\partial \underline{u}_z}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$



$$\frac{\partial W}{\partial F_{ij}} = 0 \quad \text{sauf} \quad \frac{\partial W}{\partial F_{zx}}(\nabla \underline{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial F_{zy}}(\nabla \underline{u}) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

On avait, pour tout $1 \leq i \leq d$, que $\displaystyle -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla \underline{u}) \right] = \underline{f}_i.$

La seule équation pertinente est pour $i = 3$:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\Delta u = f \ \text{ dans } \Omega, \qquad \text{avec } u = u_0 \text{ sur } \Omega$$

On retrouve un problème usuel avec CL de Dirichlet.

Le cas de forces imposées sur le bord

Supposons qu'on impose des forces g sur le bord $\partial\Omega$. Alors le problème s'écrit sous la forme

$$\inf \left\{ E(u), \quad u \text{ assez régulier pour que } E(u) \text{ ait un sens} \right\}$$

avec

$$E(u) = \int_\Omega W(\nabla u) - \int_\Omega f \cdot u - \int_{\partial\Omega} g \cdot u$$

Le troisième terme représente l'énergie potentielle associée aux forces surfaciques.

Equation d'Euler-Lagrange associée - 1

Soit $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$ assez régulier. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

- $u + \alpha v$ appartient à l'espace variationnel (celui sur lequel on minimise)
- donc $E(u) \leq E(u + \alpha v)$

Equation d'Euler-Lagrange associée - 1

Soit $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$ assez régulier. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

- $u + \alpha v$ appartient à l'espace variationnel (celui sur lequel on minimise)
- donc $E(u) \leq E(u + \alpha v)$

Pour α petit, on peut refaire le même développement limité:

$$
\begin{aligned}
&E(u+\alpha v)\\
&= \int_\Omega W(\nabla u + \alpha \nabla v) - \int_\Omega f \cdot (u + \alpha v) - \int_{\partial\Omega} g \cdot (u + \alpha v)\\
&= E(u) + \alpha \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u)\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^d f_i\, v_i \right) - \alpha \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d g_i\, v_i + O(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

On a $E(u) \leq E(u + \alpha v)$, donc le terme en facteur de α est nul.

Equation d'Euler-Lagrange associée - 2

Pour tout v assez régulier, on obtient

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u)\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \int_\Omega \sum_{i=1}^d f_i\, v_i + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d g_i\, v_i$$

Equation d'Euler-Lagrange associée - 2

Pour tout v assez régulier, on obtient

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \int_\Omega \sum_{i=1}^d f_i \, v_i + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d g_i \, v_i$$

On va dérouler les mêmes calculs que plus haut. En introduisant,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u),$$

on a

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \int_\Omega \sum_{i=1}^d f_i \, v_i + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d g_i \, v_i$$

Equation d'Euler-Lagrange associée - 2

Pour tout v assez régulier, on obtient

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \int_\Omega \sum_{i=1}^d f_i \, v_i + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d g_i \, v_i$$

On va dérouler les mêmes calculs que plus haut. En introduisant,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u),$$

on a

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \int_\Omega \sum_{i=1}^d f_i \, v_i + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d g_i \, v_i$$

et donc, par IPP,

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) v_i + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} \, v_i \, n_j = \int_\Omega \sum_{i=1}^d f_i \, v_i + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d g_i \, v_i$$

Equation d'Euler-Lagrange associée - 3

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) v_i + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} \, v_i \, n_j = \int_\Omega \sum_{i=1}^d f_i \, v_i + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d g_i \, v_i$$

Comme les v_i sont quelconques,

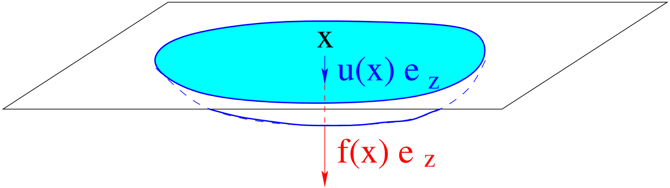
$$\forall 1 \leq i \leq d, \qquad -\sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i \qquad \text{dans } \Omega$$

$$\forall 1 \leq i \leq d, \qquad \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} \, n_j = g_i \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

Dans toute la suite, on notera div σ le vecteur de composantes

$$[\text{div } \sigma]_i := \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Cas particulier: le déplacement membranaire - 1

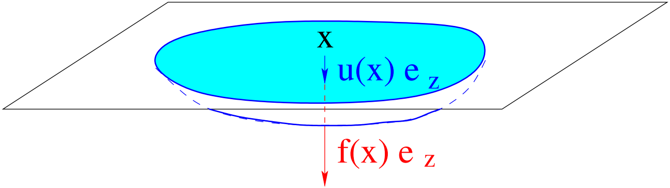


$$\underline{u}(x,y,z) = u(x,y)\,\underline{e_z}, \quad \underline{f}(x,y,z) = f(x,y)\,\underline{e_z}, \quad \underline{g}(x,y,z) = g(x,y)\,\underline{e_z}$$

et

$$W(\nabla \underline{u}) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \underline{u}_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \underline{u}_z}{\partial y}\right)^2\right]$$

Cas particulier: le déplacement membranaire - 1



$$\underline{u}(x,y,z) = u(x,y)\,\underline{e_z}, \quad \underline{f}(x,y,z) = f(x,y)\,\underline{e_z}, \quad \underline{g}(x,y,z) = g(x,y)\,\underline{e_z}$$

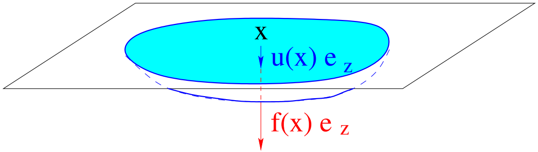
et

$$W(\nabla \underline{u}) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \underline{u}_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \underline{u}_z}{\partial y}\right)^2\right]$$

On a alors $\sigma_{ij} = \dfrac{\partial W}{\partial F_{ij}} = 0$ sauf

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial W}{\partial F_{zx}}(\nabla \underline{u}) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \sigma_{zy} = \frac{\partial W}{\partial F_{zy}}(\nabla \underline{u}) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Cas particulier: le déplacement membranaire - 2



- dans Ω: pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $\displaystyle -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \underline{f}_i$, d'où à nouveau

$$-\Delta u = f \qquad \text{dans } \Omega$$

- sur $\partial\Omega$: pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $\displaystyle \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} \, n_j = \underline{g}_i$. La seule équation pertinente est pour $i = 3$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y = \nabla u \cdot n = g \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

On retrouve un problème de Neumann. La condition de compatibilité $\displaystyle \int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0$ a une interprétation simple ...

Bilan: équations de l'élasticité

- Loi de comportement:
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u)$$
où u est le déplacement et σ le tenseur des contraintes.

  Interprétation physique: au point x, et étant donné une surface de normale n, le vecteur $\sigma(x)n$ est la force par unité de surface (σ est donc une pression) s'appliquant sur cette surface.

  On parle de loi de comportement car on relie les efforts (σ) aux déplacements (u)

Bilan: équations de l'élasticité

- Loi de comportement:
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\nabla u)$$
où u est le déplacement et σ le tenseur des contraintes.

  Interprétation physique: au point x, et étant donné une surface de normale n, le vecteur $\sigma(x)n$ est la force par unité de surface (σ est donc une pression) s'appliquant sur cette surface.

  On parle de loi de comportement car on relie les efforts (σ) aux déplacements (u)

- Equation d'équilibre: $-\mathrm{div}\,\sigma = f$ dans Ω

- Conditions aux bords: $u = u_0$ sur $\partial\Omega$, ou bien $\sigma n = g$ sur $\partial\Omega$ (ou bien un mix des deux).

Tout ceci est une version vectorielle de $-\Delta u = f$ + Conditions aux Limites

Invariances

On rappelle que $\varphi(x) = x + u(x)$ est la position courante du matériau initialement en x.

Pour des raisons d'invariance de l'énergie par translation et rotation, W ne dépend de ∇u que via $(\nabla\varphi)^T\nabla\varphi$.

On calcule

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi)^T\nabla\varphi &= (\mathrm{Id} + \nabla u)^T(\mathrm{Id} + \nabla u)\\ &= \mathrm{Id} + {\color{red}(\nabla u)^T + \nabla u} + {\color{blue}(\nabla u)^T\nabla u}\end{aligned}$$

Invariances

On rappelle que $\varphi(x) = x + u(x)$ est la position courante du matériau initialement en x.

Pour des raisons d'invariance de l'énergie par translation et rotation, W ne dépend de ∇u que via $(\nabla\varphi)^T\nabla\varphi$.

On calcule

$$\begin{aligned}(\nabla\varphi)^T\nabla\varphi &= (\mathrm{Id}\ + \nabla u)^T(\mathrm{Id}\ + \nabla u)\\ &= \mathrm{Id}\ + (\nabla u)^T + \nabla u + (\nabla u)^T\nabla u\end{aligned}$$

Dans toute la suite, on va supposer que le déplacement u ainsi que son gradient ∇u sont petits. Il est alors légitime d'introduire le gradient symétrisé

$$e(u) = \frac{1}{2}\left((\nabla u)^T + \nabla u\right)$$

et de supposer que W est une fonction de $e(u)$.

Elasticité linéaire isotrope

Loi de Hooke

- La relation de comportement la plus simple est la loi de Hooke:

$$\sigma(u) = 2\mu e(u) + \lambda(\text{tr } e(u))\,\text{Id}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau (ce sont deux scalaires), où

$$\text{tr } e(u) = \sum_{i=1}^{d} e_{ii}(u) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

est la trace de $e(u)$, et où Id est la matrice identité de $\mathbb{R}^{d \times d}$.

- On suppose que les coefficients de Lamé vérifient

$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad 2\mu + d\lambda > 0$$

où d est la dimension de l'espace dans lequel on travaille.

- Le tenseur $e(u)$ étant symétrique, le tenseur $\sigma(u)$ l'est aussi.

Problème typique

Soit Ω un ouvert connexe, borné et régulier de $\mathbb{R}^d$, et soit

$$V = \left\{ u \in (H^1(\Omega))^d, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}$$

avec $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

Soit $f \in (L^2(\Omega))^d$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction très régulière.

On cherche $u \in V$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div } [2\mu e(u) + \lambda(\text{tr } e(u)) \, \text{Id} \,] & = & f & \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega))^d \\ \sigma(u) n & = & g & \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right.$$

Formulation variationnelle - 1

Soit $v \in V$. Formellement, on multiple chaque composante de l'équation aux dérivées partielles

$$-\text{div}\ \sigma = f \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega))^d$$

par v_i (composante i de $v \in V$), on somme sur i et on intègre sur Ω: pour tout $v \in V$,

$$\int_\Omega f \cdot v = -\sum_{i=1}^d \int_\Omega \left[\sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] v_i = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^d \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}\, v_i\, n_j$$

Formulation variationnelle - 1

Soit $v \in V$. Formellement, on multiple chaque composante de l'équation aux dérivées partielles

$$-\text{div } \sigma = f \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega))^d$$

par v_i (composante i de $v \in V$), on somme sur i et on intègre sur Ω: pour tout $v \in V$,

$$\int_\Omega f \cdot v = -\sum_{i=1}^d \int_\Omega \left[\sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] v_i = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^d \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \, v_i \, n_j$$

En utilisant les conditions aux limites, on a

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \, v_i \, n_j = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Gamma_N} \sigma_{ij} \, v_i \, n_j = \int_{\Gamma_N} g \cdot v.$$

Formulation variationnelle - 2

La symétrie de $\sigma(u)$ permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \sigma_{ij}\, e_{ij}(v) \\
&= \lambda \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \mathrm{tr}\, e(u)\, \delta_{ij}\, e_{ij}(v) + 2\mu \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega e_{ij}(u)\, e_{ij}(v) \\
&= \lambda \int_\Omega \mathrm{tr}\, e(u)\, \mathrm{tr}\, e(v) + 2\mu \int_\Omega e(u) \cdot e(v).
\end{aligned}
$$

Formulation variationnelle - 3

En rassemblant ces résultats, on cherche donc $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \lambda \int_\Omega \text{tr } e(u) \, \text{tr } e(v) + 2\mu \int_\Omega e(u) \cdot e(v) = \int_\Omega f \cdot v + \int_{\Gamma_N} g \cdot v.$$

Formulation variationnelle - 3

En rassemblant ces résultats, on cherche donc $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \lambda \int_\Omega \mathrm{tr}\ e(u)\, \mathrm{tr}\ e(v) + 2\mu \int_\Omega e(u) \cdot e(v) = \int_\Omega f \cdot v + \int_{\Gamma_N} g \cdot v.$$

Il est donc naturel d'introduire les formes a et b définies par

$$a(u,v) = \lambda \int_\Omega \mathrm{tr}\ e(u)\, \mathrm{tr}\ e(v) + 2\mu \int_\Omega e(u) \cdot e(v)$$
$$b(v) = \int_\Omega f \cdot v + \int_{\Gamma_N} g \cdot v$$

La formulation variationnelle associée au problème est donc

Chercher $u \in V$ tel que, pour tout $v \in V$, on a $a(u,v) = b(v)$

Application de Lax-Milgram

- l'espace
$$V = \left\{ u \in (H^1(\Omega))^d, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}$$
est bien un espace de Hilbert.

- les formes a et b définies par
$$a(u,v) = \lambda \int_\Omega \text{tr } e(u) \, \text{tr } e(v) + 2\mu \int_\Omega e(u) \cdot e(v)$$
$$b(v) = \int_\Omega f \cdot v + \int_{\Gamma_N} g \cdot v$$
sont bien continues pour la norme $(H^1(\Omega))^d$ dès que $f \in (L^2(\Omega))^d$ et $g \in (L^2(\Gamma_N))^d$.
On constate aussi que a est symétrique.

- Il reste à montrer que a est coercif sur V.

Mouvements rigides et inégalités de Korn

Mouvements rigides

De manière générale, $\nabla u = 0$ implique que u est constant.

En élasticité linéaire, si $e(u) = 0$, i.e. $\nabla u + (\nabla u)^T = 0$, alors que peut-on dire de u?

Mouvements rigides

De manière générale, $\nabla u = 0$ implique que u est constant.

En élasticité linéaire, si $e(u) = 0$, i.e. $\nabla u + (\nabla u)^T = 0$, alors que peut-on dire de u?

On a le résultat suivant:

Lemma

Soit Ω un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou $d = 3$. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des mouvements rigides de Ω définis par

$$\mathcal{R} = \{u(x) = b + Mx, \quad b \in \mathbb{R}^d \quad \textit{et} \quad M = -M^T \textit{ matrice antisymétrique}\}.$$

Soit $u \in (H^1(\Omega))^d$. Alors $u \in \mathcal{R}$ si et seulement si $e(u) = 0$.

Mouvements rigides

De manière générale, $\nabla u = 0$ implique que u est constant.

En élasticité linéaire, si $e(u) = 0$, i.e. $\nabla u + (\nabla u)^T = 0$, alors que peut-on dire de u?

On a le résultat suivant:

Lemma

Soit Ω un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou $d = 3$. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des mouvements rigides de Ω définis par

$$\mathcal{R} = \{u(x) = b + Mx, \quad b \in \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad M = -M^T \text{ matrice antisymétrique}\}.$$

Soit $u \in (H^1(\Omega))^d$. Alors $u \in \mathcal{R}$ si et seulement si $e(u) = 0$.

Début de preuve: Si $u \in \mathcal{R}$, alors $\nabla u = M$ et $e(u) = 0$ car M est anti-symétrique.

Mouvements rigides - preuve

Réciproquement, si $e(u) = 0$, alors, pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$0 = e_{ii}(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Comme Ω est connexe, on en déduit que

$$u_i(x) = f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d),$$

où la fonction f_i ne dépend pas de x_i.

Mouvements rigides - preuve

Réciproquement, si $e(u) = 0$, alors, pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$0 = e_{ii}(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Comme Ω est connexe, on en déduit que

$$u_i(x) = f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d),$$

où la fonction f_i ne dépend pas de x_i.

On suppose maintenant $d = 2$ (l'extension à $d = 3$ est facile). On a donc

$$u_1(x) = f_1(x_2) \quad \text{et} \quad u_2(x) = f_2(x_1)$$

Mouvements rigides - preuve

Réciproquement, si $e(u) = 0$, alors, pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$0 = e_{ii}(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Comme Ω est connexe, on en déduit que

$$u_i(x) = f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d),$$

où la fonction f_i ne dépend pas de x_i.

On suppose maintenant $d = 2$ (l'extension à $d = 3$ est facile). On a donc

$$u_1(x) = f_1(x_2) \quad \text{et} \quad u_2(x) = f_2(x_1)$$

Comme $e_{12}(u) = 0$, on a

$$f_1'(x_2) + f_2'(x_1) = 0$$

et donc il existe C tel que $f_1'(x_2) = -f_2'(x_1) = C$. Donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1(x) & = & f_1(x_2) = Cx_2 + b_1 \\ u_2(x) & = & f_2(x_1) = -Cx_1 + b_2 \end{array} \right. \quad \text{et donc } u(x) = \begin{pmatrix} 0 & C \\ -C & 0 \end{pmatrix} x + b$$

Inégalité de Korn dans H_0^1: préliminaires

On a facilement que, pour tout $u \in (H^1(\Omega))^d$,

$$\|e(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Inégalité de Korn dans H^1_0: préliminaires

On a facilement que, pour tout $u \in (H^1(\Omega))^d$,

$$\|e(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{1 \leq i,j \leq d} \int_\Omega e_{ij}^2(u) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i,j \leq d} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq d} \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \\
&= \sum_{1 \leq i,j \leq d} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

où on a utilisé à la troisième ligne la relation $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$.

Inégalité de Korn dans H^1_0

On a donc montré que, pour tout $u \in (H^1(\Omega))^d$,

$$\|e(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

L'inégalité inverse est fausse, il suffit de prendre un mouvement rigide pour la mettre en défaut.

Inégalité de Korn dans H_0^1

On a donc montré que, pour tout $u \in (H^1(\Omega))^d$,

$$\|e(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

L'inégalité inverse est fausse, il suffit de prendre un mouvement rigide pour la mettre en défaut.

Dans le cas de fonctions dans $(H_0^1(\Omega))^d$, on a cependant le résultat suivant.

Lemma

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. Pour toute fonction $u \in (H_0^1(\Omega))^d$, on a

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2}\, \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inégalité de Korn dans H^1_0: preuve

Soit $u \in (C_0^\infty(\Omega))^d$. On a

$$\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega e_{ij}(u)^2 = \int_\Omega e(u) \cdot e(u)$$

Inégalité de Korn dans H_0^1: preuve

Soit $u \in (C_0^\infty(\Omega))^d$. On a

$$\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega e_{ij}(u)^2 = \int_\Omega e(u) \cdot e(u)$$

Par définition de $e(u)$, on a

$$\begin{aligned} 4e(u) \cdot e(u) &= (\nabla u + (\nabla u)^T) \cdot (\nabla u + (\nabla u)^T) \\ &= \nabla u \cdot \nabla u + ((\nabla u)^T) \cdot (\nabla u)^T + 2 \nabla u \cdot (\nabla u)^T \\ &= 2 \nabla u \cdot \nabla u + 2 \nabla u \cdot (\nabla u)^T \end{aligned}$$

Inégalité de Korn dans H_0^1: preuve

Soit $u \in (C_0^\infty(\Omega))^d$. On a

$$\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega e_{ij}(u)^2 = \int_\Omega e(u) \cdot e(u)$$

Par définition de $e(u)$, on a

$$\begin{aligned} 4e(u) \cdot e(u) &= (\nabla u + (\nabla u)^T) \cdot (\nabla u + (\nabla u)^T) \\ &= \nabla u \cdot \nabla u + ((\nabla u)^T) \cdot (\nabla u)^T + 2 \nabla u \cdot (\nabla u)^T \\ &= 2 \nabla u \cdot \nabla u + 2 \nabla u \cdot (\nabla u)^T \end{aligned}$$

et donc

$$2\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u + \nabla u \cdot (\nabla u)^T$$

On va se concentrer sur le deuxième terme.

Inégalité de Korn dans H^1_0: preuve

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla u)^T &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\
&= -\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \, u_j \quad \text{[IPP et 0 sur le bord]} \\
&= -\sum_{j=1}^d \int_\Omega u_j \frac{\partial (\text{div } u)}{\partial x_j} \quad \left[\text{avec div } u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right] \\
&= \int_\Omega (\text{div } u)^2
\end{aligned}
$$

Inégalité de Korn dans H^1_0: preuve

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla u)^T &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\
&= -\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \, u_j \quad \text{[IPP et 0 sur le bord]} \\
&= -\sum_{j=1}^d \int_\Omega u_j \frac{\partial (\text{div } u)}{\partial x_j} \quad \left[\text{avec div } u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right] \\
&= \int_\Omega (\text{div } u)^2
\end{aligned}
$$

Par conséquent, pour tout $u \in (C^\infty_0(\Omega))^d$, on a

$$
2\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega (\text{div } u)^2 \geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.
$$

On conclut en utilisant la densité de $C^\infty_0(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$.

Inégalité de Korn dans H_0^1: utilisation

Ce résultat permet de finir la preuve dans le cas où

$$V = \left\{ u \in (H^1(\Omega))^d, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} = (H_0^1(\Omega))^d$$

c'est à dire $\Gamma_D = \partial\Omega$ et sous l'hypothèse $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$.

Inégalité de Korn dans H^1_0: utilisation

Ce résultat permet de finir la preuve dans le cas où

$$V = \left\{ u \in (H^1(\Omega))^d, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} = (H^1_0(\Omega))^d$$

c'est à dire $\Gamma_D = \partial\Omega$ et sous l'hypothèse $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$.

On rappelle que

$$a(u,v) = \lambda \int_\Omega \text{tr } e(u) \, \text{tr } e(v) + 2\mu \int_\Omega e(u) \cdot e(v)$$

On a alors

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \lambda \|\text{tr } e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mu \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq 2\mu \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \quad [\lambda \geq 0] \\ &\geq \mu \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad [\text{inégalité de Korn}] \\ &\geq C_{\rm Poinc} \, \mu \, \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad [\text{inégalité de Poincaré}] \end{aligned}$$

d'où la coercivité de a sur $(H^1_0(\Omega))^d$.

Inégalité de Korn dans H^1_0: utilisation

Ce résultat permet de finir la preuve dans le cas où

$$V = \left\{ u \in (H^1(\Omega))^d, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} = (H^1_0(\Omega))^d$$

c'est à dire $\Gamma_D = \partial\Omega$ et sous l'hypothèse $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$.

On rappelle que

$$a(u,v) = \lambda \int_\Omega \text{tr } e(u) \, \text{tr } e(v) + 2\mu \int_\Omega e(u) \cdot e(v)$$

On a alors

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \lambda \|\text{tr } e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mu \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq 2\mu \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \quad [\lambda \geq 0] \\ &\geq \mu \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad [\text{inégalité de Korn}] \\ &\geq C_{\rm Poinc} \, \mu \, \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad [\text{inégalité de Poincaré}] \end{aligned}$$

d'où la coercivité de a sur $(H^1_0(\Omega))^d$.

Sous la seule hypothèse $\mu > 0$ et $2\mu + d\lambda > 0$, ok aussi, être plus soigneux

Inégalité de Korn dans H^1

On a vu que, pour tout $u \in (H^1_0(\Omega))^d$, on a

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2}\, \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}.$$

et la condition aux bords nulle est fondamentale dans la preuve.

Pour traiter des cas plus généraux ($u = 0$ sur une partie du bord), on a besoin de l'inégalité de Korn suivante, qu'on admet.

Lemma

Soit Ω un ouvert **borné** *régulier de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante C_Ω telle que, pour toute fonction $u \in (H^1(\Omega))^d$, on a*

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \right).$$

Le prix à payer pour travailler dans H^1 (et non plus dans H^1_0) est que Ω doit être borné.

Inégalité de Korn dans H^1: corollaire

Lemma

Soit Ω un ouvert connexe, borné et régulier de $\mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou $d = 3$. Soit $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ un sous-ensemble de la frontière de Ω de mesure superficielle non nulle, et soit

$$V = \left\{ u \in (H^1(\Omega))^d, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}.$$

Il existe une constante C_Ω telle que, pour toute fonction $u \in V$, on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \, \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Supposons $d = 2$: alors $\partial\Omega$ est un ensemble de “dimension” 1. L’hypothèse que Γ_D est de mesure superficielle non nulle implique que Γ_D n’est pas réduit à un point. De même, si $d = 3$, alors Γ_D, comme objet bidimensionnel, n’est pas de mesure nulle. En particulier, Γ_D n’est pas réduit à une droite.

Corollaire: preuve - 1

On montre d'abord que, si $u \in V$ et $e(u) = 0$, alors $u = 0$.

Corollaire: preuve - 1

On montre d'abord que, si $u \in V$ et $e(u) = 0$, alors $u = 0$.

En effet, si $u \in V$ et $e(u) = 0$, alors le lemme des mouvements rigides indique que $u(x) = b + Mx$, où M est une matrice antisymétrique. On a de plus $u = 0$ sur Γ_D.

Corollaire: preuve - 1

On montre d'abord que, si $u \in V$ et $e(u) = 0$, alors $u = 0$.

En effet, si $u \in V$ et $e(u) = 0$, alors le lemme des mouvements rigides indique que $u(x) = b + Mx$, où M est une matrice antisymétrique. On a de plus $u = 0$ sur Γ_D.

Si $d = 2$ et si $M \neq 0$, alors l'équation $u(x) = b + Mx = 0$ a une unique solution, ce qui est contradictoire avec le fait que Γ_D ne soit pas réduit à un point. Donc $M = 0$, ce qui implique $u = 0$.

Corollaire: preuve - 1

On montre d'abord que, si $u \in V$ et $e(u) = 0$, alors $u = 0$.

En effet, si $u \in V$ et $e(u) = 0$, alors le lemme des mouvements rigides indique que $u(x) = b + Mx$, où M est une matrice antisymétrique. On a de plus $u = 0$ sur Γ_D.

Si $d = 2$ et si $M \neq 0$, alors l'équation $u(x) = b + Mx = 0$ a une unique solution, ce qui est contradictoire avec le fait que Γ_D ne soit pas réduit à un point. Donc $M = 0$, ce qui implique $u = 0$.

Si $d = 3$, et si $M \neq 0$, alors l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b + Mx = 0$ est au plus une droite, ce qui à nouveau est contradictoire avec les hypothèses. Donc $u = 0$.

Corollaire: preuve - 2

On prouve maintenant le résultat

$$\forall u \in V, \qquad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \, \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}$$

par contradiction.

Corollaire: preuve - 2

On prouve maintenant le résultat

$$\forall u \in V, \qquad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \, \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}$$

par contradiction.

S'il est faux, alors, pour tout n, il existe $u_n \in V$ telle que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \geq n \|e(u_n)\|_{L^2(\Omega)}$. On peut choisir u_n tel que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$, et on a donc

$$(\star) \qquad \frac{1}{n} \geq \|e(u_n)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Corollaire: preuve - 2

On prouve maintenant le résultat

$$\forall u \in V, \qquad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \, \|e(u)\|_{L^2(\Omega)}$$

par contradiction.

S'il est faux, alors, pour tout n, il existe $u_n \in V$ telle que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \geq n \|e(u_n)\|_{L^2(\Omega)}$. On peut choisir u_n tel que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$, et on a donc

$$(\star) \qquad \frac{1}{n} \geq \|e(u_n)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme u_n est borné dans $(H^1(\Omega))^d$, on peut extraire une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ qui converge fortement vers u dans $(L^2(\Omega))^d$ et faiblement vers u dans $(H^1(\Omega))^d$. On écrit l'inégalité de Korn pour $u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)}$:

$$\|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)}\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \left(\|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e(u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)})\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

Corollaire: preuve - 3

On a donc

$$\|u_{\varphi(n)}-u_{\varphi(p)}\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \left(\|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e(u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)})\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

Le premier terme du membre de droite peut être rendu petit pour n et p grands car $u_{\varphi(n)}$ converge fortement dans $(L^2(\Omega))^d$.

Corollaire: preuve - 3

On a donc

$$\|u_{\varphi(n)}-u_{\varphi(p)}\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \left(\|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e(u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)})\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

Le premier terme du membre de droite peut être rendu petit pour n et p grands car $u_{\varphi(n)}$ converge fortement dans $(L^2(\Omega))^d$.

Il en est de même pour le second terme grâce au fait que

$$(\star) \qquad \frac{1}{n} \geq \|e(u_n)\|_{L^2(\Omega)}$$

et donc $e(u_n)$ converge vers 0.

Corollaire: preuve - 3

On a donc

$$\|u_{\varphi(n)}-u_{\varphi(p)}\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \left(\|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e(u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)})\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

Le premier terme du membre de droite peut être rendu petit pour n et p grands car $u_{\varphi(n)}$ converge fortement dans $(L^2(\Omega))^d$.

Il en est de même pour le second terme grâce au fait que

$$(\star) \qquad \frac{1}{n} \geq \|e(u_n)\|_{L^2(\Omega)}$$

et donc $e(u_n)$ converge vers 0.

Donc la suite $u_{\varphi(n)}$ est de Cauchy dans $(H^1(\Omega))^d$, et elle converge donc fortement vers u dans $(H^1(\Omega))^d$. Comme V est fermé dans $(H^1(\Omega))^d$, on a $u \in V$.

On a donc

$$\|u_{\varphi(n)}-u_{\varphi(p)}\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \left(\|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e(u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(p)})\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

Le premier terme du membre de droite peut être rendu petit pour n et p grands car $u_{\varphi(n)}$ converge fortement dans $(L^2(\Omega))^d$.

Il en est de même pour le second terme grâce au fait que

$$(\star) \qquad \frac{1}{n} \geq \|e(u_n)\|_{L^2(\Omega)}$$

et donc $e(u_n)$ converge vers 0.

Donc la suite $u_{\varphi(n)}$ est de Cauchy dans $(H^1(\Omega))^d$, et elle converge donc fortement vers u dans $(H^1(\Omega))^d$. Comme V est fermé dans $(H^1(\Omega))^d$, on a $u \in V$.

Comme $u_{\varphi(n)}$ converge fortement vers u dans $(H^1(\Omega))^d$, on a que $e(u_{\varphi(n)})$ converge fortement dans $(L^2(\Omega))^{d \times d}$ vers $e(u)$, ce qui, avec $(\star)$, implique que $e(u) = 0$.

Corollaire: preuve - 4

On vient donc de montrer que $u \in V$ et $e(u) = 0$. La première partie de la preuve montre donc que $u = 0$.

Ceci est contradictoire avec le fait que $\|u_{\varphi(n)}\|_{H^1(\Omega)} = 1$ et que $u_{\varphi(n)}$ converge fortement dans $(H^1(\Omega))^d$ vers u.

Utilisation du corollaire

On revient au cas général où

$$V = \left\{ u \in (H^1(\Omega))^d, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}$$

Montrons que a est coercive, sous l'hypothèse $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$ (on peut relaxer en $2\mu + d\lambda > 0$ et $\mu > 0$).

Utilisation du corollaire

On revient au cas général où

$$V = \left\{ u \in (H^1(\Omega))^d, \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}$$

Montrons que a est coercive, sous l'hypothèse $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$ (on peut relaxer en $2\mu + d\lambda > 0$ et $\mu > 0$).

On rappelle que

$$a(u, v) = \lambda \int_\Omega \text{tr } e(u) \, \text{tr } e(v) + 2\mu \int_\Omega e(u) \cdot e(v)$$

On a alors

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \lambda \|\text{tr } e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mu \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq 2\mu \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \quad [\lambda \geq 0] \\ &\geq 2C_\Omega \, \mu \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad [\text{corollaire}] \end{aligned}$$

d'où la coercivité de a sur V.