École des Ponts
ParisTech

Rappels et compléments d'homogénéisation

Frédéric Legoll (ENPC)

Cours M2 – Problèmes multiéchelles – 3 novembre 2020

Problème oscillant

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(\Omega)$. On considère une application $A_{\rm per} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d\times d}$, qu'on suppose $\mathbb{Z}^d$ périodique:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad A_{\rm per}(x+k) = A_{\rm per}(x)$$

On suppose de plus que $A_{\rm per} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et qu'il existe $c_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^T A_{\rm per}(x) \xi \geq c_1 \xi^T \xi$$

On étudie le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\text{div} \left[A_{\rm per}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(x) \right] & = & f \quad \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Problème oscillant

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(\Omega)$. On considère une application $A_{\rm per} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d\times d}$, qu'on suppose $\mathbb{Z}^d$ périodique:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad A_{\rm per}(x+k) = A_{\rm per}(x)$$

On suppose de plus que $A_{\rm per} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et qu'il existe $c_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^T A_{\rm per}(x) \xi \geq c_1 \xi^T \xi$$

On étudie le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\, \left[A_{\rm per}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(x) \right] & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

En utilisant le lemme de Lax-Milgram, ce problème est bien posé et on a

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C$$

donc il existe $u_\star \in H^1_0(\Omega)$ tel que, à extraction près, $u_\varepsilon \rightharpoonup u_\star$ dans $H^1(\Omega)$

Limite homogénéisée

On a montré que $u_\star$ est solution d'un problème de même nature:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\mathrm{div}\ [A_\star \nabla u_\star] & = & f \quad \text{dans } \Omega, \\ u_\star & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

où $A_\star$ est une matrice constante. Une fois que $A_\star$ est connue, calculer $u_\star$ est donc beaucoup plus simple que calculer u_ε (plus besoin de mailler à la petite échelle ε).

Limite homogénéisée

On a montré que $u_\star$ est solution d'un problème de même nature:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ [A_\star \nabla u_\star] & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u_\star & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $A_\star$ est une matrice constante. Une fois que $A_\star$ est connue, calculer $u_\star$ est donc beaucoup plus simple que calculer u_ε (plus besoin de mailler à la petite échelle ε).

On détermine $A_\star$ en commencant par résoudre d problèmes auxiliaires:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ \left[A_{\rm per}(y)\,(e_i + \nabla w_i(y))\right] = 0, \\ w_i \text{ est } \mathbb{Z}^d \text{ périodique} \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq d$ (dit problèmes du correcteur). On définit ensuite $A_\star$ par

$$\forall i, \qquad A_\star\, e_i = \int_{(0,1)^d} A_{\rm per}(y)\,(e_i + \nabla w_i(y))\, dy.$$

Toute la suite u_ε (et non pas seulement une sous-suite) converge vers $u_\star$.

Les correcteurs corrigent

Par définition de $u_\star$, la convergence de u_ε vers $u_\star$ est faible dans $H^1(\Omega)$. L'exemple 1D (pour lequel on peut faire des calculs analytiques) montre que ce résultat est optimal: cette convergence n'est pas forte dans $H^1(\Omega)$.

Pour avoir une description précise de u_ε dans la norme H^1, on introduit

$$u_{\varepsilon,1}(x) = u_\star(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\star}{\partial x_i}(x)$$

On remarque que

$$\nabla u_{\varepsilon,1}(x) = \nabla u_\star(x) + \sum_{i=1}^d \nabla w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\star}{\partial x_i}(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^d w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_i \nabla u_\star(x)$$

et on voit donc que le deuxième terme apporte une contribution non petite. Ainsi, en norme H^1, les fonctions $u_{\varepsilon,1}$ et $u_\star$ sont très différentes, et on peut espérer que $u_\varepsilon - u_{\varepsilon,1}$ se comporte de manière différente de $u_\varepsilon - u_\star$.

Les correcteurs corrigent (suite)

On a introduit

$$u_{\varepsilon,1}(x) = u_\star(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{d} w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_\star}{\partial x_i}(x)$$

Théorème: si $A_{\rm per}$ et $u_\star$ sont assez réguliers (par exemple $A_{\rm per}$ Holder continu et $u_\star \in W^{2,\infty}(\Omega)$), alors on a

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,1}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

Les fonctions u_ε et $u_{\varepsilon,1}$ ne convergent pas fort dans H^1, mais leur différence converge (vers 0).

Techniques de preuve

Pour l'identification du problème homogénéisé:

- le développement à deux échelles (formel = non rigoureux, mais utile; on parle aussi d'ansatz à deux échelles): on postule

  $$u_\varepsilon(x) = u_0(x, x/\varepsilon) + \varepsilon\, u_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2\, u_2(x, x/\varepsilon) + \dots,$$

  pour des fonctions u_i indépendantes de ε, et supposées périodiques de leur deuxième variable (pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \in \mathbb{R}^d \mapsto u_i(x, y)$ est $\mathbb{Z}^d$ périodique).

  On insère cet ansatz dans l'équation, et on identifie terme par terme en supposant les variables x et y indépendantes l'une de l'autre.

Techniques de preuve

Pour l'identification du problème homogénéisé:

- le développement à deux échelles (formel = non rigoureux, mais utile; on parle aussi d'ansatz à deux échelles): on postule
$$u_\varepsilon(x) = u_0(x, x/\varepsilon) + \varepsilon\, u_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2\, u_2(x, x/\varepsilon) + \dots,$$
pour des fonctions u_i indépendantes de ε, et supposées périodiques de leur deuxième variable (pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \in \mathbb{R}^d \mapsto u_i(x, y)$ est $\mathbb{Z}^d$ périodique).

  On insère cet ansatz dans l'équation, et on identifie terme par terme en supposant les variables x et y indépendantes l'une de l'autre.

- l'utilisation du div-curl lemma:
  - pour deux suites S_ε et ∇T_ε qui convergent faiblement dans L^2, le produit $S_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon$ converge (au sens des distributions) sous certaines hypothèses
  - utilisation de ce résultat général pour identifier le problème homogénéisé

Techniques de preuve (suite)

- méthode des fonctions test oscillantes: l'ansatz à deux échelles laisse penser que

$$u_\varepsilon(x) \approx u_0(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{d} w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)$$

  Idée: prendre dans la formulation variationnelle une fonction test de la forme

$$v(x) = \varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{d} w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

  pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ quelconque puis passer à la limite $\varepsilon \to 0$ dans la formulation variationnelle.

  Cf. notes rédigées sur le site web du cours.

Techniques de preuve (suite)

- méthode des fonctions test oscillantes: l'ansatz à deux échelles laisse penser que

$$u_\varepsilon(x) \approx u_0(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{d} w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)$$

  Idée: prendre dans la formulation variationnelle une fonction test de la forme

$$v(x) = \varphi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{d} w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

  pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ quelconque puis passer à la limite $\varepsilon \to 0$ dans la formulation variationnelle.

  Cf. notes rédigées sur le site web du cours.

- Il existe plusieurs autres approches ...

On a donc remplacé le problème

$$- \operatorname{div} \left[A_{\rm per}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(x) \right] = f \qquad (\star)$$

par

$$-\operatorname{div} \left[A_\star \nabla u_\star \right] = f$$

qui est beaucoup plus facile à approximer dès que $A_\star$ est connu.

Au bout du compte ...

On a donc remplacé le problème

$$-\operatorname{div}\left[A_{\mathrm{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(x)\right]=f \qquad (\star)$$

par

$$-\operatorname{div}\left[A_\star \nabla u_\star\right]=f$$

qui est beaucoup plus facile à approximer dès que $A_\star$ est connu.

En pratique, calculer $A_\star$ est plus ou moins difficile (facile dans le cas périodique qu'on vient de voir, plus difficile dans d'autres cas comme par exemple le cas aléatoire).

Tout ceci n'est rentable que si on doit résoudre le problème de référence $(\star)$ pour plusieurs f!

Au bout du compte ...

On a donc remplacé le problème

$$-\text{div}\,\left[A_{\text{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(x)\right] = f$$

par

$$-\text{div}\,\left[A_\star \nabla u_\star\right] = f$$

Contexte "Multi-query": on doit faire le calcul pour plusieurs f car

- on est en train d'optimiser sur f,
- on est en fait en train de résoudre un problème d'évolution

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t,x) - \text{div}\,\left[A_{\text{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(t,x)\right] = f$$

discrétisé en temps par

$$\frac{u_\varepsilon(t_{n+1},x)}{\delta t} - \text{div}\,\left[A_{\text{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(t_{n+1},x)\right] = f_n + \frac{u_\varepsilon(t_n,x)}{\delta t}$$

Au delà de l'équation de diffusion

On a étudié le problème de diffusion

$$-\mathrm{div} \left[A_{\rm per} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon(x) \right] = f$$

qui est le premier historiquement à avoir été étudié.

Au delà de l'équation de diffusion

On a étudié le problème de diffusion

$$-\text{div} \left[A_{\text{per}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon(x) \right] = f$$

qui est le premier historiquement à avoir été étudié.

Des résultats similaires existent pour beaucoup d'autres équations:

$$-\text{div} \left[A_{\text{per}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon(x) \right] + b(x) \cdot \nabla u_\varepsilon(x) = f$$

$$-\text{div} \left[A_{\text{per}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon(x) \right] + b_{\text{per}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla u_\varepsilon(x) = f$$

$$-\text{div} \left[A_{\text{per}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon(x) \right] + \frac{1}{\varepsilon} b_{\text{per}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla u_\varepsilon(x) = f \quad [b_{\text{per}} \text{ à moy. nulle}]$$

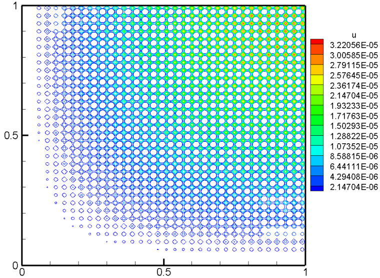
En fonction des régimes, l'équation homogénéisée est ou n'est pas du même type que l'équation de départ (ainsi, le terme d'advection peut rester ou disparaitre).

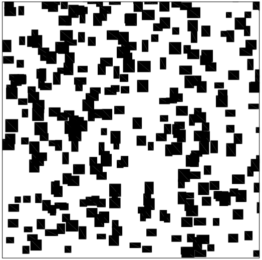
Au dela de l'équation de diffusion: domaines perforés

On peut aussi regarder des équations avec des coefficients constants, posés dans des domaines multiéchelles:

$$-\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon,$$

où Ω_ε est un domaine perforé:





On impose $u_\varepsilon = 0$ au bord extérieur et dans les perforations.

Au delà de l'équation de diffusion: élasticité

Pour le problème de l'élasticité linéaire

$$-\text{div}\ \left[C_{\rm per}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\nabla u_\varepsilon(x) + (\nabla u_\varepsilon(x))^T}{2} \right] = f \text{ dans } \Omega, \quad u_\varepsilon(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

où $C_{\rm per}$ est le tenseur d'élasticité, on a exactement le même résultat que pour l'équation de diffusion: u_ε converge (faible dans $H^1(\Omega)$, fort dans $L^2(\Omega)$) vers $u_\star$, solution du problème d'élasticité linéaire

$$-\text{div}\ \left[C_\star \frac{\nabla u_\star + (\nabla u_\star)^T}{2} \right] = f \text{ dans } \Omega, \quad u_\star = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

où $C_\star$ est un tenseur d'élasticité constant.

Au dela de l'hypothèse de périodicité

On revient au problème de départ, mais on ne suppose plus que le coefficient est périodique. On étudie donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\text{div } [A_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon(x)] & = & f \quad \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

sous l'hypothèse que

- A_ε uniformément coercive: il existe $c_1 > 0$ ind. de ε tel que

$$\forall \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^T A_\varepsilon(x) \xi \geq c_1 \xi^T \xi$$

- A_ε uniformément borné: $A_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ et $\|A_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_2$ ind. de ε, et plus précisément $\xi^T A_\varepsilon^{-1}(x) \xi \geq c_3 \xi^T \xi$

Au dela de l'hypothèse de périodicité

On revient au problème de départ, mais on ne suppose plus que le coefficient est périodique. On étudie donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\text{div } [A_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon(x)] & = & f \quad \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

sous l'hypothèse que

- A_ε uniformément coercive: il existe $c_1 > 0$ ind. de ε tel que

$$\forall \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^T A_\varepsilon(x) \xi \geq c_1 \xi^T \xi$$

- A_ε uniformément borné: $A_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ et $\|A_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_2$ ind. de ε, et plus précisément $\xi^T A_\varepsilon^{-1}(x) \xi \geq c_3 \xi^T \xi$

Sous ces seules hypothèses, on a encore que

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C$$

donc il existe $u_\star \in H^1_0(\Omega)$ tel que, à extraction près, $u_\varepsilon \rightharpoonup u_\star$ dans $H^1(\Omega)$. Qui est $u_\star$?

Théorème de compacité

Il existe une suite extraite (notée ε') et un champ $A_\star : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ (coercif et borné) tels que, pour tout $f \in L^2(\Omega)$,

- $u_{\varepsilon'}$ converge faible vers $u_\star$ dans $H^1(\Omega)$
- où $u_\star$ est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div } [A_\star(x)\nabla u_\star(x)] & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u_\star & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- on a aussi les convergences

$$A_{\varepsilon'}\nabla u_{\varepsilon'} \rightharpoonup A_\star \nabla u_\star \quad \text{faible dans } L^2(\Omega)$$

$$(\nabla u_{\varepsilon'})^T A_{\varepsilon'} \nabla u_{\varepsilon'} \to (\nabla u_\star)^T A_\star \nabla u_\star \quad \text{au sens des distributions}$$

$$\int_\Omega (\nabla u_{\varepsilon'})^T A_{\varepsilon'} \nabla u_{\varepsilon'} \to \int_\Omega (\nabla u_\star)^T A_\star \nabla u_\star$$

Remarque: ces convergences sont bien sur aussi vraies dans le cas périodique (on avait vu la première avec la preuve par div-curl, mais pas les deux autres).

Remarques

- la limite est vraie pour tout $f \in L^2(\Omega)$: il existe donc un matériau homogénéisé $A_\star$, indépendant du chargement f

- la limite dépend de la sous-suite extraite (et on ne peut pas faire mieux: cf. l'exemple d'un matériau A_ε qui serait égal à un lamellé pour certaines valeurs de ε, à un damier pour d'autres; on se rappelle que $A_\star^{\rm lamelle} \neq A_\star^{\rm damier}$)

- l'équation homogénéisée est du même type que l'équation de départ

- on n'a pas de formule pour $A_\star$: c'est un résultat abstrait de compacité!