



École des Ponts
ParisTech

Méthodes de type Eléments Finis multiéchelles

Frédéric Legoll (ENPC)

Cours M2 – Problèmes multiéchelles – 3 novembre 2020

Un problème typique

On reprend le problème de diffusion

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

posé sur un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^d , avec $f \in L^2(\Omega)$, et A^ε coercive et borné (uniformément en ε)

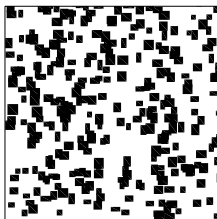
Objectif: développer des méthodes numériques inspirées par la théorie de l'homogénéisation pour traiter numériquement des cas plus généraux que ceux pour lesquels la théorie usuelle de l'homogénéisation fournit des stratégies de calcul.

L'homogénéisation n'est pas la réponse systématique

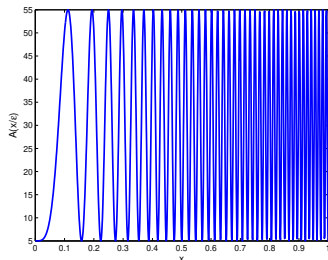
$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Si A^ε n'est pas la remise à l'échelle d'une fonction périodique, alors la théorie de l'homogénéisation peut éventuellement s'appliquer (il existe une matrice homogénéisée A^*), mais elle ne fournit PAS de formules explicites pour A^* .

$$A^\varepsilon(x) \neq A_{\text{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$



Solution typique (problème 1D)

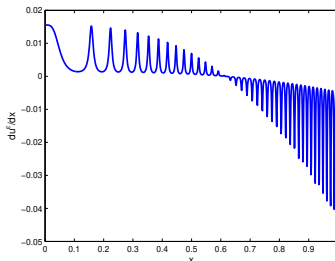
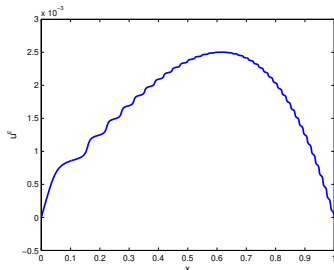


u^ε

$$A^\varepsilon(x) = 5 + 50 \sin^2(\pi x^2/\varepsilon)$$

$$\varepsilon = 0.025, \quad f(x) = x^2$$

$$\frac{du^\varepsilon}{dx}$$



$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\star)$$

Pour traiter ces problèmes difficiles, plusieurs méthodes numériques multiéchelles ont été développées. On va en étudier **une, la méthode des éléments finis multiéchelles**. Ce sont toutes des **approches onéreuses**.

Idée de base: séparer les calculs en deux phases,

- une phase **offline**, **chère** mais **indépendante** de f (et donc faite une bonne fois pour toute)
- une phase **online**, à refaire pour chaque nouveau f , mais **peu couteuse**

Tout ceci n'est rentable que si on doit résoudre (\star) pour plusieurs f .

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Formulation variationnelle: trouver $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \mathcal{A}_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = b(v) \quad (\star)$$

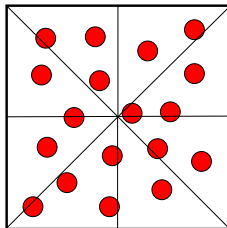
avec

$$\mathcal{A}_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla v)^T A^\varepsilon \nabla u \quad \text{et} \quad b(v) = \int_{\Omega} f v.$$

Idée: introduire un espace d'approximation avec des **fonctions de forme bien choisies** (plutôt que des fonctions génériques comme les éléments finis):

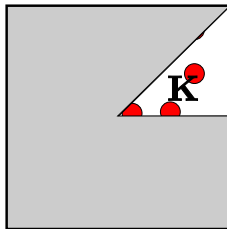
- phase offline: pré-calcul de ces fonctions de base, qui sont indépendantes de f
- phase online: pour chaque nouveau f , résoudre (\star) .

Phase offline (une première variante)

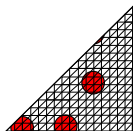


- **Maillage grossier** de Ω ; on note ϕ_i^0 les fonctions P1 (fonctions affines par morceaux) associées à ce maillage (ϕ_i^0 est associé au noeud x_i)

Phase offline (une première variante)



- **Maillage grossier** de Ω ; on note ϕ_i^0 les fonctions P1 (fonctions affines par morceaux) associées à ce maillage (ϕ_i^0 est associé au noeud x_i)
- **Fonctions de base ϕ_i^ε pour la méthode MsFEM-lin:**

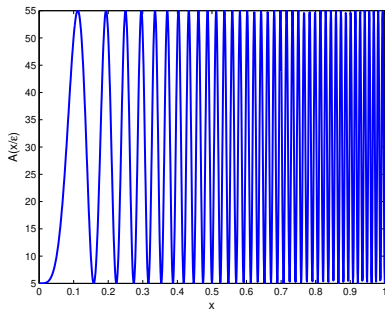


Dans chaque élément \mathbf{K} du maillage grossier,

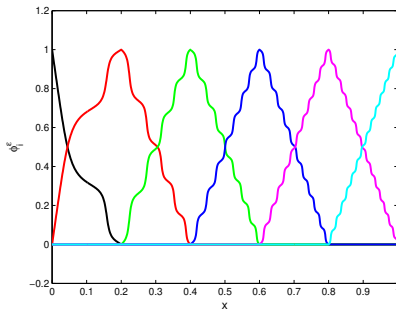
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla \phi_i^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \mathbf{K} \\ \phi_i^\varepsilon = \phi_i^0 & \text{sur } \partial\mathbf{K} \end{cases}$$

Les fonctions de forme ϕ_i^ε encodent les oscillations spécifiques au problème (présentes dans A_ε). Elles sont indépendantes de f .

Illustration numérique



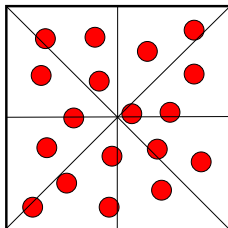
A^ε



Fonctions de base adaptées

A la différence des fonctions de base de la méthode des éléments finis, les **fonctions de base MsFEM** encodent les oscillations spécifiques du problème (comme A_ε n'oscille pas pareil à gauche et à droite, les ϕ_i^ε de droite ne sont pas les simples translatées de celles de gauche).

$$-\operatorname{div}(A^\varepsilon \nabla \phi_i^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \mathbf{K}, \quad \phi_i^\varepsilon = \phi_i^0 \quad \text{sur } \partial \mathbf{K}$$



$$W_H^\varepsilon = \text{Vect} \{ \phi_i^\varepsilon, 1 \leq i \leq L \}$$

plutôt que l'espace P1 usuel

$$V_H = \text{Vect} \{ \phi_i^0, 1 \leq i \leq L \}$$

Formulation variationnelle exacte:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \mathcal{A}_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = b(v).$$

Approximation de Galerkin dans W_H^ε : trouver $u_H^\varepsilon \in W_H^\varepsilon$ tel que

$$\forall v \in W_H^\varepsilon, \quad \mathcal{A}_\varepsilon(u_H^\varepsilon, v) = b(v).$$

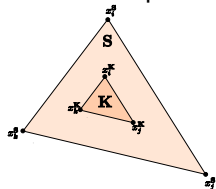
Le problème macro est facile à résoudre car de petite dimension: $\dim V_H = \dim W_H^\varepsilon$

Variante “Oversampling”

La méthode précédente n'est pas très bonne ...

Variante "Oversampling"

La méthode précédente n'est pas très bonne ...



Pour chaque élément K , on considère
un **domaine agrandi** $S \supset K$.

$$-\operatorname{div} \left[A_\varepsilon \nabla \chi_i^{\varepsilon, S} \right] = 0 \quad \text{dans } S, \quad \chi_i^{\varepsilon, S} = \chi_i^{0, S} \quad \text{sur } \partial S,$$

où $\chi_i^{0, S}$ est affine sur ∂S (égal à 1 au noeud i , égal à 0 aux autres noeuds).

Fonctions de base: définies localement par $\phi_i^\varepsilon = \chi_i^{\varepsilon, S} \Big|_K$ sur K

Discrétisation non conforme: $\phi_i^\varepsilon \notin H^1(\Omega)$

Le ratio d'oversampling (i.e. d'agrandissement de K vers S) est un paramètre qui doit être choisi avec soin.

- Des estimations d'erreur ont été établies dans le cas **périodique**

$$A^\varepsilon(x) = A_{\text{per}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

- La méthode est applicable dans des cas beaucoup plus généraux.
- Ces estimées s'écrivent sous la forme

$$\|u^\varepsilon - u_H^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\sqrt{\varepsilon} + H + \left(\frac{\varepsilon}{H}\right)^\beta \right)$$

avec β qui dépend de la méthode ($\beta = 1/2$ pour MsFEM-lin, $\beta = 1$ pour oversampling, ...).

- En 1D, on a, sans aucune hypothèse de périodicité (i.e. uniquement sous l'hypothèse que A^ε est borné inférieurement et supérieurement, uniformément en ε), que

$$\|u^\varepsilon - u_H^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C H$$