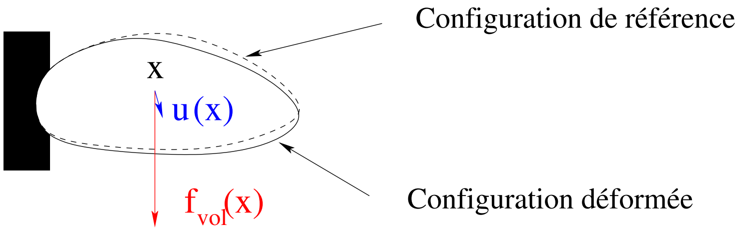
École des Ponts
ParisTech

Optimisation et problèmes multiéchelles

Frédéric Legoll (ENPC)

Cours M2 – Problèmes multiéchelles – 8 décembre 2020

Modèle du mécanique du continuum



L'inconnue est le déplacement

$$u : \Omega \to \mathbb{R}^d$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est la configuration de référence (volume occupé par le matériau en l'absence de toute sollicitation).

Par définition, $\varphi(x) = x + u(x)$ est la position courante (dans la configuration déformée) d'un point initialement en x.

Modélisation énergétique

On considère le problème

$$\inf \left\{ E(u), \quad u \text{ assez régulier pour que } E(u) \text{ ait un sens}, \quad u \in V \right\}$$

où E est l'énergie du système et V l'espace dans lequel on minimise:

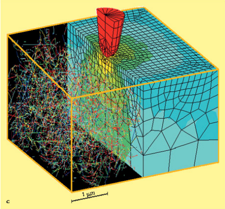
- V prend en compte les conditions aux limites de Dirichlet: par exemple, $V \subset \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}^d, \quad u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$
- l'énergie E est la somme de l'énergie élastique stockée dans le matériau et de l'énergie potentielle due aux sollicitations:

$$E(u) = \int_\Omega W(\nabla u) - b(u)$$

avec par exemple $b(u) = \displaystyle\int_\Omega f \cdot u$. La fonction $W : \mathbb{R}^{d \times d} \to \mathbb{R}$ est la densité d'énergie élastique.

Objectifs

- postuler un bon W n'est pas facile, surtout si on souhaite travailler dans des conditions non usuelles. L'intuition a ses limites ...
- La description en terme de continuum est mal adaptée pour certains phénomènes: fracture, nanoindentation, ...



On a vu comment dériver W sur la base de modèles plus microscopiques

Maintenant qu'on dispose de $E(u) = \int_\Omega W(\nabla u)$, on veut minimiser.

Difficultés

La fonctionnelle

$$u \mapsto E(u) = \int_\Omega W(\nabla u)$$

est souvent non-convexe (en particulier à cause de l'invariance par rotation de l'énergie, qui impose sur W une certaine structure incompatible avec la convexité)

Quand on minimise une fonctionnelle non convexe, tous les canulars peuvent se produire, dont certains très liés à des phénomènes multiéchelles ...

Cadre de l'étude - 1

On se place en dimension $d = 1$, avec $\Omega = (0,1)$, et on considère l'énergie

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\, dx$$

avec

$$W(z) = (z^2 - 1)^2$$

La densité W possède deux minima locaux, en $z = \pm 1$. C'est un *potentiel à deux puits*. Phénoménologiquement, chaque puits correspond à une configuration d'équilibre possible.

Cadre de l'étude - 2

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\,dx, \qquad W(z) = (z^2-1)^2$$

Pour que E soit bien définie, il faut que $\phi' \in L^4(0,1)$.

On étudie donc

$$I_\lambda = \inf\{E(\phi), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0)=0, \ \ \phi(1)=\lambda\}$$

Cadre de l'étude - 2

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\, dx, \qquad W(z) = (z^2 - 1)^2$$

Pour que E soit bien définie, il faut que $\phi' \in L^4(0,1)$.

On étudie donc

$$I_\lambda = \inf\{E(\phi), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \;\; \phi(1) = \lambda\}$$

Rappel: si $W(z) = z^2$, alors le problème ci-dessus admet une et une seule solution pour tout λ. On va voir que, dans le cas non-convexe, la situation est différente, avec des résultats qualitatifs dépendant de la valeur de $\lambda \dots$

Le problème est pair en λ. On va étudier

- $\lambda = 0$
- $\lambda \in (0,1)$
- $\lambda = 1$
- $\lambda > 1$

Dépendance aux CL: $\lambda = 0$

Lemma

Le problème

$$I_{\lambda=0} = \inf\{E(\phi), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = 0\}$$

admet une infinité de minimiseurs. L'énergie minimale $I_{\lambda=0}$ vaut 0.

Dépendance aux CL: $\lambda = 0$

Lemma

Le problème

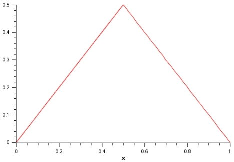
$$I_{\lambda=0} = \inf\{E(\phi), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 0\}$$

admet une infinité de minimiseurs. L'énergie minimale $I_{\lambda=0}$ vaut 0.

Nous définissons

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} x & \text{sur } [0;1/2], \\ 1 - x & \text{sur } [1/2;1] \end{cases}$$

qui vérifie $\overline{\phi}'(x) = \pm 1$ et donc $W(\overline{\phi}'(x)) = 0$



Dépendance aux CL: $\lambda = 0$

$$I_{\lambda=0} = \inf\{E(\phi), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = 0\}$$

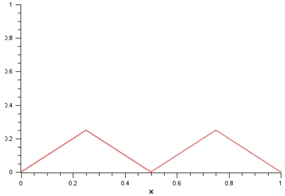
Cette fonction $\overline{\phi}$ est bien dans l'espace variationnel, et donne $E(\overline{\phi}) = 0$. Comme évidemment $W \geq 0$, on en déduit que $E(\phi) \geq 0$ pour tout ϕ et donc $I_{\lambda=0} = 0$.

Dépendance aux CL: $\lambda = 0$

$$I_{\lambda=0} = \inf\{E(\phi), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \;\; \phi(1) = 0\}$$

Cette fonction $\overline{\phi}$ est bien dans l'espace variationnel, et donne $E(\overline{\phi}) = 0$. Comme évidemment $W \geq 0$, on en déduit que $E(\phi) \geq 0$ pour tout ϕ et donc $I_{\lambda=0} = 0$.

On peut construire une infinité d'autres minimiseurs: il suffit de prendre une fonction affine par morceaux, composée de droites de pente ± 1.



Rien dans le problème n'empèche l'apparition de microstructures asymptotiquement fines!

Dépendance aux CL: $\lambda \in (0,1)$

Pour $\lambda \in (0,1)$, on peut faire la même construction, et donc

Lemma

Pour $\lambda \in (0,1)$, le problème

$$I_\lambda = \inf\{E(\phi), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = \lambda\}$$

admet une infinité de minimiseurs. L'énergie minimale I_λ vaut 0.

Dépendance aux CL: $\lambda = 1$

La situation change complètement si on modifie uniquement la condition aux limites en $x = 1$.

Lemma

Le problème

$$I_{\lambda=1} = \inf\{E(\phi), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = 1\}$$

admet un unique minimiseur, $\overline{\phi}(x) = x$*. L'énergie minimale* $I_{\lambda=1}$ *vaut 0.*

Dépendance aux CL: $\lambda = 1$

La situation change complètement si on modifie uniquement la condition aux limites en $x = 1$.

Lemma

Le problème

$$I_{\lambda=1} = \inf\{E(\phi), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = 1\}$$

admet un unique minimiseur, $\overline{\phi}(x) = x$. *L'énergie minimale* $I_{\lambda=1}$ *vaut 0.*

Il est évident que $\overline{\phi}(x) = x$ est dans l'espace variationnel, et conduit à $E(\overline{\phi}) = 0$. Puisque à nouveau $E(\phi) \geq 0$ pour tout ϕ, on obtient que $I_{\lambda=1} = 0$ et $\overline{\phi}(x)$ est un minimiseur.

Dépendance aux CL: $\lambda = 1$

Si ψ est un autre minimiseur, alors

$$\int_0^1 (\psi'(x)^2 - 1)^2 \, dx = 0$$

donc $\psi'(x)^2 = 1$ pour presque tout $x \in (0,1)$.

Dépendance aux CL: $\lambda = 1$

Si ψ est un autre minimiseur, alors

$$\int_0^1 (\psi'(x)^2 - 1)^2 \, dx = 0$$

donc $\psi'(x)^2 = 1$ pour presque tout $x \in (0,1)$.

On peut écrire

$$1 \underset{\text{CL sur } \psi}{=} \psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(x) \, dx \underset{\text{car } |\psi'(x)| = 1}{\leq} \int_0^1 dx = 1$$

On doit donc avoir égalité dans tous les termes, c'est-à-dire $\psi'(x) = 1$, d'où l'unicité du minimiseur.

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

Pour $\lambda > 1$, le résultat est qualitativement le même que pour $\lambda = 1$:

Lemma

Pour $\lambda > 1$, le problème

$$I_\lambda = \inf\{E(\phi), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = \lambda\}$$

admet un unique minimiseur, $\overline{\phi}(x) = \lambda\, x$.

La preuve est moins triviale que pour $\lambda = 1$ car $I_\lambda > 0$, donc pas de caractérisation immédiate du minimum et des possibles minimiseurs.

On note

$$V = \left\{\phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = \lambda\right\}$$

l'espace de minimisation.

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

On introduit l'enveloppe convexe W^* de W:

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

Pour tout $\phi \in V$,

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi') \geq \int_0^1 W^*(\phi') \underset{\text{Jensen}}{\geq} W^*\left(\int_0^1 \phi'\right) = W^*(\lambda) \underset{\lambda>1}{=} W(\lambda)$$

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

Pour tout $\phi \in V$,

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi') \geq \int_0^1 W^*(\phi') \underset{\text{Jensen}}{\geq} W^*\left(\int_0^1 \phi'\right) = W^*(\lambda) \underset{\lambda>1}{=} W(\lambda)$$

Donc $I_\lambda \geq W(\lambda)$

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

Pour tout $\phi \in V$,

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi') \geq \int_0^1 W^*(\phi') \underset{\text{Jensen}}{\geq} W^* \left(\int_0^1 \phi' \right) = W^*(\lambda) \underset{\lambda > 1}{=} W(\lambda)$$

Donc $I_\lambda \geq W(\lambda)$

Par ailleurs, $\overline{\phi}(x) = \lambda x$ est bien dans V et sature cette inégalité.

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

Pour tout $\phi \in V$,

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi') \geq \int_0^1 W^*(\phi') \underset{\text{Jensen}}{\geq} W^*\left(\int_0^1 \phi'\right) = W^*(\lambda) \underset{\lambda>1}{=} W(\lambda)$$

Donc $I_\lambda \geq W(\lambda)$

Par ailleurs, $\overline{\phi}(x) = \lambda x$ est bien dans V et sature cette inégalité.

Donc $I_\lambda = W(\lambda)$. Il reste à montrer que c'est le seul minimiseur ...

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

Soit $\phi \in V$ un minimiseur:

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi') \geq \int_0^1 W^*(\phi') \underset{\text{Jensen}}{\geq} W^*\left(\int_0^1 \phi'\right) = W^*(\lambda) \underset{\lambda>1}{=} W(\lambda)$$

donc toutes les inégalités sont des égalités.

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

Soit $\phi \in V$ un minimiseur:

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi') \geq \int_0^1 W^*(\phi') \underset{\text{Jensen}}{\geq} W^*\left(\int_0^1 \phi'\right) = W^*(\lambda) \underset{\lambda>1}{=} W(\lambda)$$

donc toutes les inégalités sont des égalités.

Donc $W(\phi') = W^*(\phi')$ et donc $|\phi'| \geq 1$.

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

Soit $\phi \in V$ un minimiseur:

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi') \geq \int_0^1 W^*(\phi') \underset{\text{Jensen}}{\geq} W^*\left(\int_0^1 \phi'\right) = W^*(\lambda) \underset{\lambda>1}{=} W(\lambda)$$

donc toutes les inégalités sont des égalités.

Donc $W(\phi') = W^*(\phi')$ et donc $|\phi'| \geq 1$.

Attention, W^* n'est pas strictement convexe, donc on ne peut pas utiliser les résultats sur le cas d'égalité dans Jensen.

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

$$I_\lambda = \inf \left\{ \int_0^1 W(\phi'), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = \lambda \right\}$$

On introduit le problème relaxé:

$$I_\lambda^* = \inf \left\{ \int_0^1 W^*(\phi'), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = \lambda \right\}$$

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

$$I_\lambda = \inf \left\{ \int_0^1 W(\phi'), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \;\; \phi(1) = \lambda \right\}$$

On introduit le problème relaxé:

$$I_\lambda^* = \inf \left\{ \int_0^1 W^*(\phi'), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \;\; \phi(1) = \lambda \right\}$$

On a que $I_\lambda^* = W(\lambda)$: en effet,

- pour $\phi(x) = \lambda x$, on a $E^*(\phi) = W^*(\lambda) = W(\lambda)$
- pour tout $\phi \in V$, on a

$$E^*(\phi) = \int_0^1 W^*(\phi') \underset{\text{Jensen}}{\geq} W^* \left(\int_0^1 \phi' \right) = W^*(\lambda) \underset{\lambda > 1}{=} W(\lambda)$$

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

$$I_\lambda = \inf \left\{ \int_0^1 W(\phi'), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \;\; \phi(1) = \lambda \right\}$$

On introduit le problème relaxé:

$$I^*_\lambda = \inf \left\{ \int_0^1 W^*(\phi'), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \;\; \phi(1) = \lambda \right\}$$

On a que $I^*_\lambda = W(\lambda)$: en effet,

- pour $\phi(x) = \lambda x$, on a $E^*(\phi) = W^*(\lambda) = W(\lambda)$
- pour tout $\phi \in V$, on a

$$E^*(\phi) = \int_0^1 W^*(\phi') \underset{\text{Jensen}}{\geq} W^* \left(\int_0^1 \phi' \right) = W^*(\lambda) \underset{\lambda > 1}{=} W(\lambda)$$

Donc $I^*_\lambda = W(\lambda) = I_\lambda$

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

Soit ϕ minimiseur pour I_λ:

$$I_\lambda = E(\phi)$$

On a vu que $|\phi'| \geq 1$.

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

Soit ϕ minimiseur pour I_λ:

$$I_\lambda = E(\phi)$$

On a vu que $|\phi'| \geq 1$.

On en déduit que ϕ est un minimiseur pour I^*_λ: en effet,

$$E^*(\phi) = \int_0^1 W^*(\phi') \underset{|\phi'|\geq 1}{=} \int_0^1 W(\phi') = I_\lambda = I^*_\lambda$$

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

Soit ϕ minimiseur pour I_λ:

$$I_\lambda = E(\phi)$$

On a vu que $|\phi'| \geq 1$.

On en déduit que ϕ est un minimiseur pour I^*_λ: en effet,

$$E^*(\phi) = \int_0^1 W^*(\phi') \underset{|\phi'|\geq 1}{=} \int_0^1 W(\phi') = I_\lambda = I^*_\lambda$$

On peut donc écrire l'équation d'Euler-Lagrange pour ce problème relaxé (vrai aussi pour le problème initial, mais inexploitable)

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

$$I_\lambda^* = \inf \left\{ \int_0^1 W^*(\phi'), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = \lambda \right\}$$

Equation d'Euler-Lagrange: pour tout $\psi \in W^{1,4}(0,1)$ avec $\psi(0) = \psi(1) = 0$, on a

$$\int_0^1 (W^*)'(\phi')\psi' = 0$$

donc

$$\int_0^1 \Big[(W^*)'(\phi') \Big]' \psi = 0$$

donc

$$\Big[(W^*)'(\phi') \Big]' = 0 \quad \text{et} \quad (W^*)'(\phi'(x)) = C \text{ constant sur } (0,1)$$

Dépendance aux CL: $\lambda > 1$

On a $(W^*)'(\phi'(x)) = C$. On trace $(W^*)'$ et on voit que

- si $C \leq 0$, alors $\phi'(x) \leq 1$, donc
$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi' \leq 1, \quad \text{contradictoire avec } \lambda > 1$$
- donc $C > 0$, et donc $\phi'(x)$ est constant et donc $\phi'(x) = \lambda$, d'où unicité du minimiseur

Ajout d'un terme d'ordre 0

Nous montrons maintenant comment l'ajout d'un seul terme peut encore changer dramatiquement le comportement du modèle.

Ajout d'un terme d'ordre 0

Nous montrons maintenant comment l'ajout d'un seul terme peut encore changer dramatiquement le comportement du modèle.

Soit $\epsilon > 0$ et

$$E_\epsilon(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\,dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\,dx$$

Lemma

Pour tout $\epsilon > 0$, le problème

$$I_\epsilon = \inf\{E_\epsilon(\phi), \quad \phi \in W^{1,4}(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = 0\}$$

n'admet aucun minimiseur. On a $I_\epsilon = 0$.

Ajout d'un terme d'ordre 0

$$E_\epsilon(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\,dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\,dx$$

- On va construire une suite minimisante ϕ_n telle que

$$\lim_{n\to\infty} E_\epsilon(\phi_n) = 0$$

- Ceci implique que $I_\epsilon = 0$.

Ajout d'un terme d'ordre 0

$$E_\epsilon(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\,dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\,dx$$

- On va construire une suite minimisante ϕ_n telle que

$$\lim_{n\to\infty} E_\epsilon(\phi_n) = 0$$

- Ceci implique que $I_\epsilon = 0$.
- Ceci implique aussi qu'il ne peut pas exister de minimiseur $\overline{\phi}$, sinon

$$0 = E_\epsilon(\overline{\phi}) = \int_0^1 W(\overline{\phi}'(x))\,dx + \epsilon \int_0^1 \overline{\phi}(x)^2\,dx$$

Les deux termes étant positifs, ceci impose

$$\int_0^1 W(\overline{\phi}'(x))\,dx = 0, \qquad \text{donc } |\overline{\phi}'(x)| = 1$$

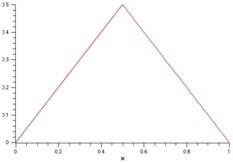
et

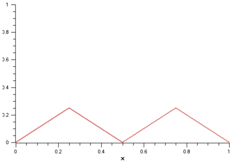
$$\epsilon \int_0^1 \overline{\phi}(x)^2\,dx = 0, \qquad \text{donc } |\overline{\phi}(x)| = 0 \text{ car } \epsilon > 0$$

Impossible à concilier ...

Ajout d'un terme d'ordre 0

La suite minimisante est définie comme suit:



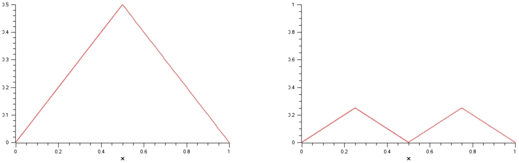


$\ldots$

On considère ϕ_n telle que $|\phi_n'(x)| = 1$

Ajout d'un terme d'ordre 0

La suite minimisante est définie comme suit:

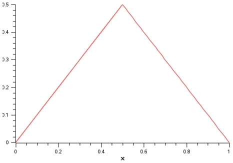
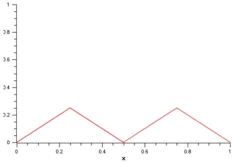


...

A gauche: ϕ_1, avec $\max \phi_1 = \phi_1(1/2) = 1/2$.
A droite: ϕ_2, avec $\max \phi_2 = \phi_2(1/4) = 1/4$.

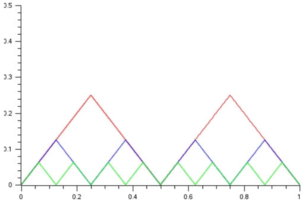
Ajout d'un terme d'ordre 0

La suite minimisante est définie comme suit:

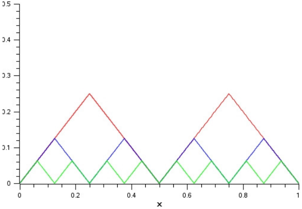
  . . .

A gauche: ϕ_1, avec $\max \phi_1 = \phi_1(1/2) = 1/2$.
A droite: ϕ_2, avec $\max \phi_2 = \phi_2(1/4) = 1/4$.

On construit ϕ_n telle que $|\phi_n'(x)| = 1$ et $\max |\phi_n| = 1/(2n)$.



Ajout d'un terme d'ordre 0

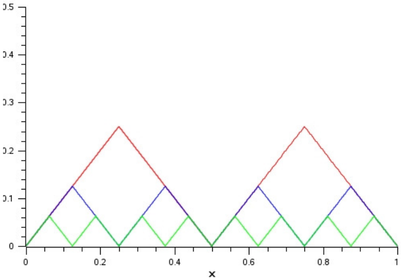


On a donc $\displaystyle\int_0^1 W(\phi_n'(x))\,dx = 0$ et

$$E(\phi_n) = \epsilon \int_0^1 \phi_n(x)^2\,dx \leq \frac{\epsilon}{4n^2}$$

Donc $\lim_{n\to\infty} E(\phi_n) = 0$. Ceci conclut la preuve.

Ajout d'un terme d'ordre 0



On voit se développer des phénomènes multi-échelles. Pour minimiser l'énergie, la suite minimisante ϕ_n se met à exhiber des structures de plus en plus fines, sans qu'il n'existe asymptotiquement un minimiseur:

- la suite ϕ_n converge vers 0 dans L^∞, mais la fonction nulle n'est pas un minimiseur de l'énergie.
- d'autre part, ϕ_n ne converge vers 0 que faiblement dans $H^1(0,1)$ puisqu'on a $\displaystyle\int_0^1 \phi_n'(x)^2\,dx = 1$ pour tout n.

Ajout d'un terme de viscosité

Finalement, nous montrons maintenant comment l'ajout d'un autre terme, cette fois-ci de type "viscosité", peut encore changer le comportement.

Ajout d'un terme de viscosité

Finalement, nous montrons maintenant comment l'ajout d'un autre terme, cette fois-ci de type "viscosité", peut encore changer le comportement.

Soit $\epsilon \geq 0$, $\eta > 0$ et

$$E_{\epsilon,\eta}(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\,dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\,dx + \eta \int_0^1 \phi''(x)^2\,dx$$

Lemma

Pour tout $\epsilon \geq 0$ et $\eta > 0$, le problème

$$I_{\epsilon,\eta} = \inf\{E_{\epsilon,\eta}(\phi), \quad \phi \in H^2(0,1), \quad \phi(0) = 0, \ \ \phi(1) = 0\}$$

admet (au moins) un minimiseur.

On a pris $\phi \in H^2(0,1)$ pour que le dernier terme de E soit bien défini. Alors (en 1D) on a ϕ' continue, donc les 3 termes de E sont bien définis.

Ajout d'un terme de viscosité

Nous montrons que la fonctionnelle

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\, dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\, dx + \eta \int_0^1 \phi''(x)^2\, dx$$

est coercive sur l'espace variationnel

$$V = \inf\{\phi \in H^2(0,1), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 0\}$$

pour la topologie de $H^2(0,1)$.

Ajout d'un terme de viscosité

Nous montrons que la fonctionnelle

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\, dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\, dx + \eta \int_0^1 \phi''(x)^2\, dx$$

est coercive sur l'espace variationnel

$$V = \inf\{\phi \in H^2(0,1), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 0\}$$

pour la topologie de $H^2(0,1)$.

Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad (z^2 - 1)^2 \geq \alpha z^2 - \beta$$

Ajout d'un terme de viscosité

On a donc
$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad (z^2-1)^2 \geq \alpha z^2 - \beta$$
donc
$$\int_0^1 W(\phi'(x))\,dx \geq \alpha \|\phi'\|^2_{L^2} - \beta$$
et donc, grace à l'inégalité de Poincaré,
$$\int_0^1 W(\phi'(x))\,dx \geq \overline{\alpha} \|\phi\|^2_{H^1} - \beta$$

Ajout d'un terme de viscosité

On a donc

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad (z^2-1)^2 \geq \alpha z^2 - \beta$$

donc

$$\int_0^1 W(\phi'(x))\, dx \geq \alpha \|\phi'\|_{L^2}^2 - \beta$$

et donc, grace à l'inégalité de Poincaré,

$$\int_0^1 W(\phi'(x))\, dx \geq \overline{\alpha} \|\phi\|_{H^1}^2 - \beta$$

Donc

$$\begin{aligned} E(\phi) &= \int_0^1 W(\phi'(x))\, dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\, dx + \eta \int_0^1 \phi''(x)^2\, dx \\ &\geq \overline{\alpha} \|\phi\|_{H^1}^2 - \beta + \epsilon \|\phi\|_{L^2}^2 + \eta \|\phi''\|_{L^2}^2 \\ &\geq \min\{\overline{\alpha}, \eta\} \|\phi\|_{H^2}^2 - \beta \end{aligned}$$

Ceci montre que E est coercive: $\|\phi\|_{H^2} \to \infty$ implique $E(\phi) \to \infty$.

Ajout d'un terme de viscosité

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\,dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\,dx + \eta \int_0^1 \phi''(x)^2\,dx \geq 0$$

On considère une suite minimisante ϕ_n, i.e. une suite $\phi_n \in V$ telle que

$$E(\phi_n) \to \inf_{\phi \in V} E(\phi)$$

Ajout d'un terme de viscosité

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\, dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\, dx + \eta \int_0^1 \phi''(x)^2\, dx \geq 0$$

On considère une suite minimisante ϕ_n, i.e. une suite $\phi_n \in V$ telle que

$$E(\phi_n) \to \inf_{\phi \in V} E(\phi)$$

Puisque

$$E(\phi) \geq \min\{\overline{\alpha}, \eta\} \|\phi\|^2_{H^2} - \beta,$$

on a que $\|\phi_n\|_{H^2}$ est borné, donc (à extraction près) ϕ_n converge faible vers un certain ϕ dans $H^2(0,1)$.

Ajout d'un terme de viscosité

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\,dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\,dx + \eta \int_0^1 \phi''(x)^2\,dx \geq 0$$

On considère une suite minimisante ϕ_n, i.e. une suite $\phi_n \in V$ telle que

$$E(\phi_n) \to \inf_{\phi \in V} E(\phi)$$

Puisque

$$E(\phi) \geq \min\{\overline{\alpha}, \eta\} \|\phi\|_{H^2}^2 - \beta,$$

on a que $\|\phi_n\|_{H^2}$ est borné, donc (à extraction près) ϕ_n converge faible vers un certain ϕ dans $H^2(0,1)$.

On a encore $\phi \in V$. D'après le théorème de Rellich, on peut supposer (à une extraction près) que $\phi_n' \to \phi'$ dans $L^2(0;1)$ fort et $\phi_n \to \phi$ dans $L^2(0;1)$ fort.

Ajout d'un terme de viscosité

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\,dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\,dx + \eta \int_0^1 \phi''(x)^2\,dx$$

- on a ϕ_n'' qui converge faible vers ϕ'' dans $L^2(0,1)$, donc

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n''(x)^2\,dx \geq \int_0^1 \phi''(x)^2\,dx$$

- on a ϕ_n qui converge fort vers ϕ dans $L^2(0,1)$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(x)^2\,dx = \int_0^1 \phi(x)^2\,dx$$

- il reste à passer à la limite dans le premier terme ... ϕ_n' converge fort vers ϕ' dans $L^2(0,1)$, mais W est quartique ...

Ajout d'un terme de viscosité

- ϕ_n' converge fort vers ϕ' dans $L^2(0,1)$, donc (à extraction près) $\phi_n'(x)$ converge pp vers $\phi'(x)$ dans $(0,1)$,
- donc $W(\phi_n'(x))$ converge pp vers $W(\phi'(x))$ dans $(0,1)$

Ajout d'un terme de viscosité

- ϕ_n' converge fort vers ϕ' dans $L^2(0,1)$, donc (à extraction près) $\phi_n'(x)$ converge pp vers $\phi'(x)$ dans $(0,1)$,
- donc $W(\phi_n'(x))$ converge pp vers $W(\phi'(x))$ dans $(0,1)$
- mais pas de borne, donc on ne peut pas utiliser le théorème de convergence dominée ...

- ϕ_n' converge fort vers ϕ' dans $L^2(0,1)$, donc (à extraction près) $\phi_n'(x)$ converge pp vers $\phi'(x)$ dans $(0,1)$,
- donc $W(\phi_n'(x))$ converge pp vers $W(\phi'(x))$ dans $(0,1)$
- mais pas de borne, donc on ne peut pas utiliser le théorème de convergence dominée ...

On utilise Fatou car $W(\phi_n'(x)) \geq 0$:

$$\int_0^1 \liminf W(\phi_n') \leq \liminf \int_0^1 W(\phi_n')$$

donc

$$\int_0^1 W(\phi') \leq \liminf \int_0^1 W(\phi_n')$$

Ajout d'un terme de viscosité

On a montré que

$$\liminf \int_0^1 W(\phi_n') \geq \int_0^1 W(\phi')$$

$$\liminf \int_0^1 \phi_n''(x)^2 \, dx \geq \int_0^1 \phi''(x)^2 \, dx$$

$$\lim \int_0^1 \phi_n(x)^2 \, dx = \int_0^1 \phi(x)^2 \, dx$$

donc

$$\liminf \ \Big((1)_n + (2)_n + (3)_n \Big) \geq (1) + (2) + (3)$$

ce qui s'écrit

$$\liminf E(\phi_n) \geq E(\phi)$$

Or

$$\liminf E(\phi_n) = \lim E(\phi_n) = \inf_V E$$

donc $\phi \in V$ est tel que $E(\phi) = \inf_V E$: on a construit un minimiseur.

Ajout d'un terme de viscosité

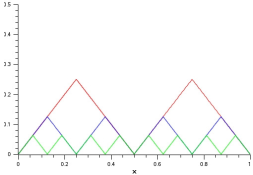
$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\, dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\, dx + \eta \int_0^1 \phi''(x)^2\, dx$$

- Aucun espoir a priori que le minimiseur soit unique car E n'est pas convexe ...

Ajout d'un terme de viscosité

$$E(\phi) = \int_0^1 W(\phi'(x))\, dx + \epsilon \int_0^1 \phi(x)^2\, dx + \eta \int_0^1 \phi''(x)^2\, dx$$

- Aucun espoir a priori que le minimiseur soit unique car E n'est pas convexe ...
- Le troisième terme (en ϕ'') pénalise les variations de ϕ': passer de $\phi' = 1$ à $\phi' = -1$ coute de l'énergie
- Le second terme cherche à rendre ϕ petit, et pousse vers de nombreux changements de ϕ'
- Compromis entre les deux termes (en fonction des valeurs de ε et η) pour fixer l'échelle caractéristique des microstructures



Bilan

- pour
$$\inf \left\{ \int_0^1 W(\phi'), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = \lambda \right\}$$
un unique ou bien une infinité de minimiseurs, en fonction de λ
- en rajoutant un terme d'ordre plus petit,
$$\inf \left\{ \int_0^1 W(\phi') + \int_0^1 \phi^2 \right\}$$
aucun minimiseur
- en rajoutant un terme d'ordre plus grand,
$$\inf \left\{ \int_0^1 W(\phi') + \int_0^1 \phi^2 + \int_0^1 (\phi'')^2 \right\}$$
au moins un minimiseur

Origine de ces modèles

- On a vu comment passer d'un modèle atomistique à un modèle de continuum, qui donne une énergie de la forme

$$\int_0^1 W(\phi')$$

avec W souvent non-convexe

Origine de ces modèles

- On a vu comment passer d'un modèle atomistique à un modèle de continuum, qui donne une énergie de la forme

$$\int_0^1 W(\phi')$$

  avec W souvent non-convexe

- en poursuivant le développement (i.e. en gardant les termes d'ordre supérieur dans le développement), on peut espérer obtenir une énergie de la forme

$$\int_0^1 W(\phi') + \eta_h \int_0^1 (\phi'')^2 \quad \text{ou} \quad \int_0^1 W(\phi') + \eta_h \int_0^1 G(\phi')\,(\phi'')^2$$

  avec $\lim_{h\to 0} \eta_h = 0$

Origine de ces modèles

- On a vu comment passer d'un modèle atomistique à un modèle de continuum, qui donne une énergie de la forme

$$\int_0^1 W(\phi')$$

avec W souvent non-convexe

- en poursuivant le développement (i.e. en gardant les termes d'ordre supérieur dans le développement), on peut espérer obtenir une énergie de la forme

$$\int_0^1 W(\phi') + \eta_h \int_0^1 (\phi'')^2 \quad \text{ou} \quad \int_0^1 W(\phi') + \eta_h \int_0^1 G(\phi')\,(\phi'')^2$$

avec $\lim_{h\to 0} \eta_h = 0$

- Problème: a-t-on η (ou bien $\eta\, G(\phi')$) positif? Si oui, cela va aider. Sinon ...