

Considérez le système SIR

$$S' = -r\frac{SI}{N}, \quad I' = r\frac{SI}{N} - aI, \quad R' = aI. \quad (1)$$

avec conditions initiales $S(t=0) = S_0 > 0$, $I(t=0) = I_0 > 0$, $R(t=0) = 0$.

1. Expliquez ce que représentent S , I , R , N et les constantes a et r dans ce modèle.
2. Montrez que la population totale est constante.
3. Est-ce que le système (1) peut être réduit à un système avec moins d'équations et, si c'est le cas, lequel ?
4. Déterminez les conditions sur S_0 pour avoir une propagation de l'épidémie.
5. Déterminez la valeur maximale de I pendant la dynamique.
6. Déterminez le nombre d'individus qui attrapent la maladie pendant l'épidémie.
7. Comment vous devez changer le système (1) pour prendre en compte la naissance et la mort d'individus (en supposant que les nouveaux-nés n'ont pas la maladie mais peuvent l'attraper par la suite) ?
- 8.a) Considérez une maladie sexuellement transmissible humaine que soit transmissible seulement lors de contacts hétérosexuels, n'aie pas de temps d'incubation, aie un temps de rétablissement de deux semaines et ne donne pas d'immunité. Proposez un système d'équations différentielles ordinaires pour modéliser la dynamique des populations d'individus sains et infectés. Vous pouvez noter α_{HF} le taux d'infection des hommes par les femmes et α_{FH} celui des femmes par des hommes.
- 8b) Comment vous devez modifier le modèle si vous avez un temps d'incubation d'une semaine pour la transmission des Hommes vers les femmes mais pas de temps d'incubation dans l'autre sens ?
- 8c) Déterminez le taux de reproduction de base de la dynamique de la question 8b) en fonction des paramètres de votre modèle.