Principes de modélisation

Fiche d'exercices du 23 septembre 2025

1 Equation de la chaleur

On a mis en exergue dans le cours plusieurs propriétés qualitatives de l'équation de la chaleur. Il est normal, lorsqu'on construit des schémas numériques, de se demander si ceux-ci vérifient les mêmes propriétés qualitatives (qui sont souvent au fond des propriétés physiques fondamentales). Afin de rester dans un cadre simple, on se place en dimension un, on considère des conditions aux limites de type Dirichlet homogène, et on discrétise le problème sur $\Omega =]0,1[$ par la méthode la plus simple, c'est-à-dire la méthode des différences finies. On considère donc le problème

$$\partial_t u = \alpha \, \partial_{xx} u, \qquad u(t,0) = u(t,1) = 0, \tag{1}$$

avec $\alpha > 0$, on utilise le pas de temps Δt et le pas d'espace Δx avec $1 = (N+1)\,\Delta x$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$. Dans la suite, u_j^n est l'approximation de $u(n\,\Delta t, j\,\Delta x)$.

Exercice 1 (Schéma d'Euler explicite)**.** *Le schéma d'Euler explicite consiste à discrétiser* (1) *par*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0, \qquad u_{j=0}^{n+1} = u_{j=N+1}^{n+1} = 0, \tag{2}$$

où la dernière équation réplique le fait que $u(t,0) = u(t,1) = 0$. Pour simplifier, on suppose que la condition initiale vérifie aussi ces conditions aux limites, et donc $u_{j=0}^{n=0} = u_{j=N+1}^{n=0} = 0$.

On va montrer que le schéma d'Euler explicite (2) *est stable en norme L^∞ si et seulement si la condition*

$$2\,\alpha\,\Delta t \leq (\Delta x)^2 \tag{3}$$

est satisfaite.

1. *Montrer que le schéma d'Euler explicite* (2) *peut se réécrire sous la forme*

$$u_j^n = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j-1}^{n-1} + \left(1 - 2\,\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^{n-1} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j+1}^{n-1}. \tag{4}$$

2. *On suppose que la condition CFL est vérifiée, et que la donnée initiale vérifie*

$$\forall 0 \leq j \leq N+1, \quad 0 \leq u_j^0 \leq M$$

pour une certaine constante $M > 0$. Montrer par récurrence que les mêmes inégalités restent vraies pour tous les temps ultérieurs:

$$\forall 0 \leq j \leq N+1, \quad 0 \leq u_j^n \leq M.$$

3. *En déduire que* $\max_{0\leq j\leq N+1} |u_j^n| \leq \|U^0\|_\infty$, *et conclure quant à la stabilité* L^∞.

4. *Réciproquement, supposons que la condition CFL ne soit pas vérifiée, c'est-à-dire que*
$$2\,\alpha\,\Delta t > (\Delta x)^2.$$
Montrer que le schéma d'Euler explicite peut s'écrire sous la forme $U^n = M\,U^{n-1}$, *où la matrice* M *vaut*
$$M = \begin{pmatrix} 1-2c & c & 0 & \cdots & 0 \\ c & 1-2c & c & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & c & 1-2c & c \\ 0 & \cdots & 0 & c & 1-2c \end{pmatrix}$$
avec $c = \alpha\,\Delta t/(\Delta x)^2 > 1/2$, *et où* $U^n \in \mathbb{R}^N$ *est le vecteur des degrés de liberté* internes *(on n'y met pas les deux degrés de liberté sur le bord du domaine, qui sont fixés par les conditions aux limites).*

5. *On considère le vecteur*
$$\forall 1 \leq j \leq N, \quad \xi_j = (-1)^j.$$
Montrer que $\xi^T\xi = N$ *et que*
$$M\,\xi = (3c-1, 1-4c, 4c-1, \dots)^T$$
ce qui implique $\xi^T M\,\xi = 2(1-3c) + (N-2)(1-4c)$.

6. *En déduire que*
$$-\frac{\xi^T M\,\xi}{\xi^T\xi} = (4c-1)\frac{N-2+2(3c-1)/(4c-1)}{N}.$$

7. *Puisque* $2c > 1$, *on a* $4c-1 > 1$. *Montrer qu'il existe* $N_0(c)$ *tel que, si* $N \geq N_0(c)$ *(c'est à dire si* $\Delta x \leq \Delta x_0(c)$*), alors*
$$-\frac{\xi^T M\,\xi}{\xi^T\xi} > 1,$$
ce qui signifie que la plus petite valeur propre de M *vérifie*
$$\lambda_{\min} = \inf_{U\in\mathbb{R}^N} \frac{U^T M\,U}{U^T U} \leq \frac{\xi^T M\,\xi}{\xi^T\xi} < -1.$$

8. *Pour le choix particulier* $U^0 = U_{\min}$ *(vecteur propre associé à la valeur propre* $\lambda_{\min}$*), montrer que* $U^n = \lambda_{\min}^n U^0$ *et donc que* $|u_j^n| = |\lambda_{\min}|^n\,|u_j^0| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *pour tout* $1 \leq j \leq N$.

9. *En déduire que le schéma n'est pas stable en norme* L^∞.

Remarque 1. *La condition* (3) *s'appelle condition de Courant-Friedrich-Lewy ou* condition CFL. *Pour la petite histoire, elle fut découverte en 1928 (avant l'apparition des premiers ordinateurs!).*

Remarque 2. *Il n'est pas étonnant qu'il y ait une borne inférieure sur la valeur de* Δx *pour que le schéma* (2) *soit stable. Sinon, on pourrait faire tendre* Δx *vers 0 (à* Δt *fixé), et le schéma* (2) *deviendrait*

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \alpha\, \partial_{xx} u^n = 0.$$

Dans cette équation, on remarque qu'on perd de la régularité à chaque pas de temps: si $u^n \in H^2(\Omega)$*, alors* $u^{n+1} \in L^2(\Omega)$*, etc, d'où l'instabilité du schéma.*

2 Equation de transport

On étudie l'équation de transport

$$\partial_t u + V\, \partial_x u = 0 \tag{5}$$

avec $V > 0$.

Exercice 2 (Stabilité du schéma décentré amont)**.** *On discrétise* (5) *par le schéma* décentré amont*:*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V\, \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \tag{6}$$

1. *En utilisant le fait que*

$$\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = \partial_x v - \frac{\Delta x}{2}\, \partial_{xx} v + O(\Delta x^2),$$

et en négligeant les termes de reste quadratiques, montrer que l'équation équivalente est

$$\partial_t v + V\, \partial_x v + \left[\frac{\Delta t}{2} V^2 - \frac{\Delta x}{2} V \right] \partial_{xx} v = 0. \tag{7}$$

2. *Sous quelle condition (sur le signe du terme devant* $\partial_{xx} v$*) cette équation conduit-elle à une solution stable? En déduire la condition CFL.*

3. *On considère* (5) *sur* $\Omega = (0, 2\pi)$ *et muni de conditions aux limites périodiques. On choisit la condition initiale* $u(t = 0, x) = \exp(ikx)$ *pour* $k \in \mathbb{N}^\star$*, qui est bien périodique.*

   - *Identifier la solution* $u(t, x)$*.*
   - *Que peut on dire de* $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ *en fonction du temps?*

4. *On considère* (7) *sur* $\Omega = (0, 2\pi)$ *et muni de conditions aux limites périodiques. On choisit la condition initiale* $v(t = 0, x) = \exp(ikx)$ *pour* $k \in \mathbb{N}^\star$*, qui est bien périodique.*

   - *Chercher une solution de* (7) *sous la forme* $v(t, x) = \exp(p(t) + ikx)$ *et identifier la fonction* $p(t)$*;*
   - *Que peut on dire de* $\|v(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ *en fonction du temps?*

Remarque 3. *L'équation équivalente* (7) *permet de comprendre deux observations numériques:*

- *A cause du terme diffusif dans* (7)*, et donc du caractère dissipatif de l'équation, la solution a tendance à converger (dans un certain sens) vers 0 en temps long;*

- *quand on considère une condition initiale irrégulière (sous la forme d'un créneau, par exemple), la solution devient de plus en plus régulière au cours des itérations en temps du schéma* (6)*. Ceci est relié au caratère régularisant de l'équation de la chaleur.*