Principes de modélisation

Fiche d'exercices du 30 septembre 2025

1 Lois de conservation scalaires

L'objectif de ces exercices est d'obtenir les équations de conservation, en suivant au cours du temps un domaine Ω_t qui se déplace.

Exercice 1 (Concentration de soluté)**.** *On s'intéresse à la concentration $u(t,x)$ d'un soluté qui se déplace à la vitesse b. On va suivre au cours du temps un volume Ω_t, qui est le volume qu'occupe le domaine Ω à l'instant t_0. Ce volume se déplace à la vitesse b, et la quantité de soluté dans ce volume reste constante:*

$$I_t = \int_{\Omega_t} u(t,x)\,dx = \text{constant}. \tag{1}$$

1. *Expliquer pourquoi $\Omega_t = \{y + b\,(t - t_0),\ y \in \Omega\}$, et en déduire que*

$$I_t = \int_{\Omega} u(t, y + b\,(t - t_0))\,dy. \tag{2}$$

2. *En utilisant le fait que I_t est constant au cours du temps, montrer que*

$$0 = \int_{\Omega} (\partial_t u + b\,\partial_y u)(t, y + b\,(t - t_0))\,dy. \tag{3}$$

3. *La dérivée est en particulier nulle à l'instant t_0, ce qui permet d'écrire*

$$0 = \int_{\Omega} (\partial_t u + b\,\partial_y u)(t_0, y)\,dy. \tag{4}$$

   En déduire que $\partial_t u + b\,\partial_y u = 0$ en tout point de l'espace et en tout temps.

In english: We consider the concentration $u(t,x)$ of a solute that moves at speed b. We follow, as time goes by, a volume Ω_t, which is the volume occupied at time t by the system that was in Ω at the time t_0. This volume moves at speed b, and the solute quantity in it remains constant, thus (1). *1. Explain the expression for Ω_t and deduce* (2). *2. Using that I_t is constant, show* (3). *3. Write* (3) *at time t_0, deduce* (4) *and conclude.*

Exercice 2 (Trafic routier)**.** *On reprend l'exemple du trafic routier vu en cours. Comme dans l'exercice précédent, on suit un volume Ω_t au cours du temps, de telle manière à ce que le nombre de véhicules dans Ω_t reste constant.*

1. *Soit $x(t,y)$ la position au temps t d'un véhicule qui est à la position initiale y (au temps initial t_0). Ecrire une équation vérifiée par $t \mapsto x(t,y)$.*

2. *Donner l'expression de Ω_t en utilisant la fonction $x(t,y)$.*

3. *On note* $u(t,x)$ *la densité de véhicules. Le nombre de véhicules dans* Ω_t *est*

$$I_t = \int_{\Omega_t} u(t,x)\,dx.$$

Par un changement de variable, écrire I_t *comme une intégrale sur* Ω.

4. *Montrer que*

$$\frac{d}{dt} I_t = \int_\Omega \left(\partial_t u + v(u)\,\partial_y u\right)(t, x(t,y))\,\frac{\partial x}{\partial y}(t,y)\,dy \\ + \int_\Omega u(t,x(t,y))\,v'\big[u\big(t,x(t,y)\big)\big]\,\frac{\partial u}{\partial y}(t,x(t,y))\,\frac{\partial x}{\partial y}(t,y)\,dy. \quad (5)$$

5. *Que valent* $x(t_0,y)$ *et* $\dfrac{\partial x}{\partial y}(t_0,y)$ *?*

6. *En écrivant* (5) *à* $t = t_0$, *montrer que*

$$0 = \int_\Omega \left(\partial_t u + v(u)\,\partial_y u\right)(t_0,y)\,dy + \int_\Omega u(t_0,y)\,v'\big[u\big(t_0,y\big)\big]\,\frac{\partial u}{\partial y}(t_0,y)\,dy.$$

7. *En déduire que* $\partial_t u + \partial_y\big[v(u)\,u\big] = 0$.

In english: Same exercise as above for the road traffic example studied in the lecture notes. We now consider vehicles on a road, denote $u(t,x)$ *the density of vehicles, and* $x(t,y)$ *the position at time* t *of a vehicle which is at the initial position* y *at the initial time* t_0.

2 Mécanique des fluides

Exercice 3 (Ecoulement de Poiseuille). *On considère l'écoulement d'un fluide entre deux plaques horizontales, situées à la hauteur* $z = 0$ *et* $z = h$. *On suppose que les équations de Stokes sont valides, et que le gradient de pression est constant et orienté selon l'axe* e_x, *parallèle aux plaques:* $\nabla p = \partial_x p\, e_x$. *Montrer que la vitesse donnée par la formule suivante est solution des équations de Stokes sans efforts extérieurs:*

$$v(x,y,z) = v_x(z)\,e_x, \quad \textit{avec} \quad v_x(z) = 4\,v_{\max}\,\frac{z}{h}\left(1 - \frac{z}{h}\right), \tag{6}$$

où la vitesse $v_{\max}$, *qui est atteinte au milieu de la couche, est donnée par*

$$v_{\max} = -\frac{h^2}{8\eta}\,\partial_x p. \tag{7}$$

Est-il raisonnable physiquement que la vitesse soit positive lorsque le gradient de pression est négatif? Pourquoi peut-on parler de flot laminaire?

Pour mémoire, on rappelle les équations de Stokes:

$$-\eta\,\Delta v + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0. \tag{8}$$

In english: we consider the Stokes equations (8), *and a fluid moving between two plates at elevation* $z = 0$ *and* $z = h$. *We assume that the pressure gradient is constant and along the* e_x *axis, parallel to the plates:* $\nabla p = \partial_x p\, e_x$. *Show that the fluid velocity is given by* (6)–(7). *Is it physically consistent that the velocity is positive when the pressure gradient is negative? Why can we speak of a laminar flow?*