Principes de modélisation

Fiche d'exercices du 7 octobre 2025: homogénéisation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et régulier, et soit une fonction $f \in L^2(\Omega)$.

On se donne une matrice symétrique $A(y) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, définie pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, bornée et uniformément coercive, au sens où il existe $m > 0$ et $M < \infty$ tels que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad |A(y)| \leq M \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^T A(y) \xi \geq m\, \xi^T \xi. \tag{1}$$

On note $Q = [0,1]^d$ le cube unité. On suppose que la matrice A est Q-périodique, au sens où, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a $A(y+k) = A(y)$.

L'objectif de cette fiche est d'étudier l'équation

$$-\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f \text{ dans } \Omega, \qquad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2}$$

lorsque le petit paramètre $\varepsilon > 0$ tend vers 0, et de comprendre vers quoi tend ce modèle.

1 Estimations a priori

1. Montrer qu'il existe un unique $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ solution de (2), puis qu'il existe une constante C, indépendante de ε, telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C. \tag{3}$$

2. En déduire qu'il existe $u_\star \in H^1_0(\Omega)$ tel que, à extraction près, u_ε converge (faiblement dans $H^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$) vers $u_\star$.

2 Etude en dimension un

On se place en dimension un d'espace, et on choisit l'ouvert $\Omega =]0,1[$. On introduit

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt. \tag{4}$$

En dimension un, le problème (2) s'écrit

$$-\left[a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u'_\varepsilon\right]' = f \quad \text{dans }]0,1[, \qquad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0, \tag{5}$$

où a est une fonction périodique (de période 1), vérifiant $m \leq a(y) \leq M < \infty$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

3. On va identifier une équation dont $u_\star$ est solution.

   (a) Montrer que la solution u_ε de (5) vérifie

$$\forall x \in]0,1[, \quad u'_\varepsilon(x) = b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(F(x) + c_\varepsilon), \tag{6}$$

   où c_ε est une constante, F est définie par (4) et b une fonction qu'on identifiera.

   (b) En utilisant (3), montrer qu'il existe $c < \infty$ tel que

$$\forall \varepsilon, \quad |c_\varepsilon| \leq c. \tag{7}$$

(c) On admet le résultat suivant, qui sera (partiellement) démontré à la Question 5:

Lemme 1. *Soit $b \in L^\infty(\mathbb{R})$, avec b périodique de période 1. Alors*

$$\forall \phi \in L^1(\mathbb{R}), \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi(x)\, dx = \langle b \rangle \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx$$

où $\langle b \rangle = \int_0^1 b(y)\, dy$.

En utilisant (6), (7) et le lemme 1, montrer que, à extraction près, u'_ε converge faiblement dans $L^2(0,1)$ vers la fonction v donnée par $v(x) = b^\star \left(F(x) + c\right)$, où $b^\star$ est une constante dont on donnera l'expression en fonction de a.

(d) En déduire que la limite $u_\star$ de u_ε identifiée à la Question 2 vérifie

$$-\left[a^\star \, u'_\star\right]' = f \quad \text{dans }]0,1[, \qquad u_\star(0) = u_\star(1) = 0, \tag{8}$$

où $a^\star$ est une constante dont on donnera l'expression en fonction de a.

4. On suppose qu'on discrétise le problème (5) par des éléments finis de type P1, sur un maillage régulier de l'intervalle $]0,1[$, de taille $h = 1/N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$. On note ϕ_i les fonctions de base, $1 \le i \le N-1$.

(a) Montrer qu'après discrétisation, le problème (5) revient à trouver $U^h_\varepsilon \in \mathbb{R}^{N-1}$ tel que

$$K^h_\varepsilon U^h_\varepsilon = B^h, \tag{9}$$

où B^h est un vecteur dans $\mathbb{R}^{N-1}$ et K^h_ε est une matrice de taille $N-1 \times N-1$. On donnera l'expression de B^h et on montrera que

$$\left[K^h_\varepsilon\right]_{ij} = \int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \, \phi'_i(x) \, \phi'_j(x)\, dx. \tag{10}$$

(b) On suppose qu'on choisit la taille du maillage de façon indépendante de ε. Pour h fixé, quelle est la limite quand ε tend vers 0 de K^h_ε?

(c) On admet que, à extraction près, le vecteur $U^h_\varepsilon \in \mathbb{R}^{N-1}$ converge, quand ε tend vers 0, vers un certain vecteur $u^h_\star \in \mathbb{R}^{N-1}$. Quelle équation matricielle vérifie $u^h_\star$?

Montrer que cette équation matricielle est la discrétisation par éléments finis du problème

$$-\left[\overline{a} \, u'_\star\right]' = f \quad \text{dans }]0,1[, \qquad u_\star(0) = u_\star(1) = 0. \tag{11}$$

On donnera l'expression de la constante $\overline{a}$ en fonction de a.

(d) En comparant (8) et (11), montrer qu'il n'est pas raisonnable, lorsque ε tend vers 0, de discrétiser (5) avec un pas de maillage indépendant de ε. Quel est l'avantage, sur le plan numérique, du problème (8) par rapport au problème (5)?

5. Démontrer le lemme 1 dans le cas particulier où la fonction ϕ est l'indicatrice d'un intervalle borné $[0, \alpha]$.

3 Etude en dimension $d > 1$

Dans cette partie, on se place en dimension $d > 1$, et on va utiliser des arguments formels (qui pourront ensuite être rendus rigoureux, mais ceci sort du cadre de cette fiche) pour montrer que la solution u_ε de (2) converge (au sens établi dans la Question 2) vers $u_\star$ solution de

$$-\operatorname{div}\left(A^\star \nabla u_\star\right) = f \ \text{ dans } \Omega, \qquad u_\star = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \tag{12}$$

où $A^\star$ est une certaine matrice constante. Dans la suite, on va identifier cette matrice.

Soit $p \in \mathbb{R}^d$. On admet qu'il existe une fonction $\psi_p \in H^1(Q)$ (on rappelle que $Q = [0,1]^d$), définie sur $\mathbb{R}^d$, Q-périodique, et vérifiant

$$- \operatorname{div} \left[A(y) \left(\nabla \psi_p(y) + p\right)\right] = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d. \tag{13}$$

On admet aussi que la solution de cette équation est unique (à une constante additive près).

Pour identifier une équation dont $u_\star$ est solution, on va supposer que u_ε s'écrit sous la forme (on parle d'ansatz à deux échelles)

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x, x/\varepsilon) + \varepsilon\, u_1(x, x/\varepsilon) + \dots, \tag{14}$$

où chaque fonction u_j est indépendante de ε, dépend de la variable lente $x \in \Omega$ et de la variable rapide $y = x/\varepsilon \in \mathbb{R}^d$. La périodicité de la microstructure se reflète dans le fait que, pour chaque $j \geq 0$ et chaque x, la fonction $y \mapsto u_j(x, y)$ est supposée $\mathbb{Z}^d$ périodique. On peut donc se restreindre à $y \in (0,1)^d$. L'objectif est d'insérer l'ansatz (14) dans (2) et d'identifier u_0, u_1, ...

Remarque 1. *On pourra remarquer que, en dimension 1, $u'_\varepsilon(x)$ est bien de cette forme, cf. la formule* (6).

On va calculer le gradient de u_ε en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées:

$$\nabla \left[u_0(x, x/\varepsilon)\right] = (\nabla_x u_0)(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \left(\nabla_y u_0\right)(x, x/\varepsilon). \tag{15}$$

On insère l'ansatz (14) dans (2) et on identifie en puissance de ε.

6. Montrer que l'équation à l'ordre $O(\varepsilon^{-2})$ est

$$- \operatorname{div}_y \left[A(y) \nabla_y u_0\right] = 0. \tag{16}$$

   Muni de conditions aux limites périodiques, cette EDP (en la variable y) implique que u_0 est indépendant de y, et donc que u_0 ne dépend que de x.

7. On étudie l'équation à l'ordre $O(\varepsilon^{-1})$.

   (a) Montrer que cette équation est

$$- \operatorname{div}_y \left[A(y) \nabla_y u_1\right] - \operatorname{div}_y \left[A(y) \nabla_x u_0\right] - \operatorname{div}_x \left[A(y) \nabla_y u_0\right] = 0, \tag{17}$$

   ce qui, compte tenu du résultat de la Question 6, se réécrit

$$- \operatorname{div}_y \left[A(y) \nabla_y u_1\right] - \operatorname{div}_y \left[A(y) \nabla_x u_0\right] = 0. \tag{18}$$

   (b) Montrer que

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^{d} \psi_i(y)\, \partial_i u_0(x) \tag{19}$$

   est solution de (18), où $\psi_i \equiv \psi_{e_i}$ est défini par (13).

   (c) Montrer que l'ensemble des solutions de (18) sont les fonctions u_1 données par

$$u_1(x, y) = \overline{u}_1(x) + \sum_{i=1}^{d} \psi_i(y)\, \partial_i u_0(x), \tag{20}$$

   où $\overline{u}_1$ est une fonction quelconque ne dépendant que de x.

8. Montrer que l'équation à l'ordre $O(\varepsilon^0)$ est

$$-\operatorname{div}_y [A(y)\nabla_y u_2] - \operatorname{div}_y [A(y)\nabla_x u_1] - \operatorname{div}_x [A(y)\nabla_y u_1] - \operatorname{div}_x [A(y)\nabla_x u_0] = f(x). \quad (21)$$

Cette relation pourrait permettre d'identifier u_2 en fonction de u_0 et u_1, et donc en fonction de u_0 et $\overline{u}_1$, au vu de (20). Mais cela n'aiderait pas à identifier u_0 lui-même. Pour avancer, il suffit en fait de moyenner (21) par rapport à la variable y. On intègre donc (21) sur $y \in Q$:

$$-\int_Q \operatorname{div}_y [A(y)\nabla_y u_2] - \int_Q \operatorname{div}_y [A(y)\nabla_x u_1] - \int_Q \operatorname{div}_x [A(y)\nabla_y u_1] - \int_Q \operatorname{div}_x [A(y)\nabla_x u_0] = \int_Q f(x). \quad (22)$$

(a) Montrer que les deux premiers termes du membre de gauche de (22) sont nuls.

(b) En utilisant (20), montrer que

$$A(y)\nabla_y u_1 + A(y)\nabla_x u_0 = \sum_{i=1}^{d} \partial_i u_0(x)\, A(y)\, [\nabla\psi_i + e_i]\,. \quad (23)$$

(c) On définit la matrice $A^\star$ par:

$$\forall 1 \leq i \leq d, \qquad A^\star\, e_i = \int_Q A(y)\, [\nabla\psi_i + e_i]\,. \quad (24)$$

Montrer que (22) implique $-\operatorname{div}(A^\star\nabla u_0) = f$, où tous les opérateurs différentiels sont maintenant des opérateurs différentiels en x.

(d) Expliquer pourquoi il est pertinent de supposer que u_0 est nul sur $\partial\Omega$.

On vient ainsi de montrer que le terme dominant dans l'ansatz (14), à savoir u_0, vérifie le problème (12), et on dispose d'une définition pour $A^\star$, à savoir (24).

English version: We consider the oscillatory problem (2), where, for any $y \in \mathbb{R}^d$, the symmetric matrix $A(y) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ satisfies the bounds (1). Denoting $Q = [0,1]^d$, we assume that A is Q-periodic, in the sense that, for any $k \in \mathbb{Z}^d$ and $y \in \mathbb{R}^d$, we have $A(y+k) = A(y)$.

1. Show that there exists a unique $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ solution to (2), and that there exists a constant C, independent of ε, such that (3) holds for any $\varepsilon > 0$.

2. Deduce that there exists $u_\star \in H^1_0(\Omega)$ such that, up to a subsequence extraction, u_ε converges (weakly in $H^1(\Omega)$ and strongly in $L^2(\Omega)$) to $u_\star$.

3. We momentarily focus on the one-dimensional case and set $\Omega =]0,1[$. Problem (2) can be recast as (5), where a is a periodic function satisfying $m \leq a(y) \leq M < \infty$ for any $y \in \mathbb{R}$.

   (a) Show that u_ε satisfies (6), where c_ε is a constant, F is defined by (4) and b is a function to identify.

   (b) Using (3), show that there exists $c < \infty$ such that (7) holds.

   (c) We admit Lemma 1. Using (6) and (7), show that, up to some extraction, u'_ε weakly converges in $L^2(0,1)$ to the function v defined by $v(x) = b^\star (F(x) + c)$, where $b^\star$ is a constant to identify in terms of a.

   (d) Deduce that the limit $u_\star$ of u_ε identified at Question 2 satisfies (8), for a constant $a^\star$ of which the expression will be given.

4. Remaining in 1D, assume that we discretise (5) with P1 finite elements, on a regular mesh of $]0,1[$, of size $h = 1/N$ for some $N \in \mathbb{N}^*$. Let ϕ_i be the basis functions, for $1 \leq i \leq N-1$.

    (a) Show that, after discretisation, the problem (5) amounts to find $U_\varepsilon^h \in \mathbb{R}^{N-1}$ solution to (9), where the matrix K_ε^h, of size $N-1 \times N-1$, is defined by (10), and where B^h is a vector in $\mathbb{R}^{N-1}$. Provide the expression of B^h.

    (b) Assume h is independent of ε. When h is fixed, what is the limit when $\varepsilon \to 0$ of K_ε^h?

    (c) We admit that, up to some extraction, $U_\varepsilon^h \in \mathbb{R}^{N-1}$ converges, when $\varepsilon \to 0$, to some $u_\star^h \in \mathbb{R}^{N-1}$. Which equation is satisfied by $u_\star^h$? Show that this equation is the finite element discretisation of (11). Provide the expression of the constant $\overline{a}$ in terms of a.

    (d) Comparing (8) and (11), does it seem reasonable, when $\varepsilon \to 0$, to discretise (5) with a mesh size independent of ε? What is the advantage, from the numerical viewpoint, of (8) over (5)?

5. Prove Lemma 1 in the particular case when the function ϕ is the indicatrix function of the bounded interval $[0, \alpha]$.

We now go back to $d > 1$ and we are going to use formal arguments to show that the solution u_ε to (2) converges to $u_\star$ solution to (12) for some constant matrix $A^\star$ that we are going to identify. For any $p \in \mathbb{R}^d$, we introduce the Q-periodic function $\psi_p \in H^1(Q)$ solution to (13). We assume that u_ε can be written in the form of the two-scale ansatz (14), where each function u_j is independent of ε, depends on the slow variable $x \in \Omega$ and on the fast variable $y = x/\varepsilon \in \mathbb{R}^d$. Periodicity of the microstructure is encoded in the fact that, for any $j \geq 0$ and any x, the function $y \mapsto u_j(x, y)$ is $\mathbb{Z}^d$ periodic. We can thus restrict to $y \in (0,1)^d$. We are going to insert (14) in (2), identify in powers of ε and obtain an expression for u_0, u_1, ... Note that, in dimension 1, $u_\varepsilon'(x)$ is of this form, see (6). We use the chain rule to compute the gradient of u_ε, see (15).

6. Show that the $O(\varepsilon^{-2})$ equation is (16). Complemented with periodic boundary conditions, this PDE (in the y variable) implies that u_0 is independent of y, and thus only depends on x.

7. We consider the $O(\varepsilon^{-1})$ equation.

    (a) Show that it reads as (17), and thus, using the result of Question 6, that (18) holds.

    (b) Show that (19) is a solution to (18), with $\psi_i \equiv \psi_{e_i}$ defined by (13).

    (c) Show that the set of solutions to (18) are the functions u_1 given by (20), where $\overline{u}_1$ is an arbitrary function only depending on x.

8. Show that the $O(\varepsilon^0)$ equation is (21). We are going to integrate it over $y \in Q$ to obtain (22).

    (a) Show that the first two terms in the left-hand side of (22) vanish.

    (b) Using (20), show (23).

    (c) Introduce the matrix $A^\star$ defined by (24). Show that (22) implies that $-\operatorname{div}(A^\star \nabla u_0) = f$, where all differential operators now act on x.

    (d) Explain why it is reasonable to assume that u_0 vanishes on $\partial\Omega$.