Examen – Problèmes d'évolution

31 mai 2022 Durée : 3 heures

Il est important de bien rédiger, d'écrire des phrases, etc.

Problème : Equation de réaction-diffusion

Soit $T > 0$ un temps final et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier. Le but de ce problème est d'étudier le problème dit de *réaction-diffusion* qui consiste à trouver une fonction $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = f(u(t,x)), & \text{pour } (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ u(t,x) = 0, & \text{pour } (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = g(x), & \text{pour } x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $g \in L^2(\Omega)$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Attention ! Prenez bien garde au fait que cette équation est différente de l'équation de la chaleur étudiée en cours. En effet, dans l'équation de la chaleur, le second membre f est une fonction de $L^2((0,T); L^2(\Omega))$ **indépendante de** u. Ici, dans l'équation de réaction-diffusion, le second membre peut dépendre de u de manière **non linéaire** ! Par contre, f ne dépend que de u et non pas de ses dérivées.

Ce problème permet de modéliser l'évolution de la concentration d'un agent chimique dans un domaine en présence de réactions chimiques qui conduisent à la création ou à la disparition de l'agent concerné. La fonction f permet de modéliser la vitesse à laquelle se produisent ces réactions.

Le problème est constitué de deux parties indépendantes. Dans la première partie, nous allons prouver existence et unicité d'une solution faible au problème (1) sous certaines hypothèses faites sur la fonction f. Dans la deuxième partie, nous étudierons un cas où f ne satisfait pas les hypothèses de la première partie et où on peut montrer qu'il n'existe pas de solution régulière au problème (1) .

Dans toute la suite de l'énoncé du problème, nous munirons $H_0^1(\Omega)$ du produit scalaire (et donc de la norme induite) défini ci-dessous :

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad \langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} := \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\right)^{1/2}.$$

Prendre garde au fait qu'il ne s'agit pas du produit scalaire $H^1(\Omega)$ usuel.

0. Montrer que la norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle_{H_0^1(\Omega)}$ (qui sera notée dans la suite $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$) définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ usuelle. En déduire que $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle_{H_0^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

Partie I : Problème de réaction-diffusion avec terme de réaction Lipschitz

Nous supposerons dans toute cette partie que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitz.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad |f(z)| \leqslant C(1 + |z|). \tag{2}$$

On introduit la définition suivante de solution faible du problème (1).

Définition 1. *On dit qu'une fonction $u \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega))$ telle que $u' \in L^2((0,T), H^{-1}(\Omega))$ est une solution faible de (1) si et seulement si*

(C1) pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et pour presque tout $t \in (0,T)$,

$$\langle u'(t), v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega \nabla_x u(t) \cdot \nabla_x v = \int_\Omega f(u)(t) v,$$

où $f(u)$ est la fonction telle que $f(u)(t,x) = f(u(t,x))$ pour presque tout $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$.

(C2) $u(0) = g$.

Le but de cette première partie du problème est de prouver l'existence d'une unique solution faible au problème (1) au sens de la définition ci-dessus.

2. Justifier formellement la définition ci-dessus.
3. Rappeler l'énoncé du théorème qui permet de donner un sens à la condition (C2).

Passons à la preuve de l'existence de la solution faible en tant que telle. Dans la suite, nous noterons $X := \mathcal{C}^0([0,T], L^2(\Omega))$.

4. Montrer que pour tout $u \in X$ la fonction $f(u)$ appartient à $L^2((0,T), L^2(\Omega))$.

5. Pour tout $u \in X$, on considère le problème suivant : trouver $w_u \in L^2((0,T), H^1(\Omega))$ tel que $\partial_t w_u \in L^2((0,T), H^{-1}(\Omega))$ solution faible du problème

$$\begin{cases} \partial_t w_u(t,x) - \Delta_x w_u(t,x) = f(u)(t,x), & \text{pour } (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ w_u(t,x) = 0, & \text{pour } (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ w_u(0,x) = g(x), & \text{pour } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Montrer que, pour tout $u \in X$, il existe une unique solution faible w_u du problème (3) et rappeler sa définition.

6. Montrer que l'application $A : \begin{cases} X & \to & X \\ u & \mapsto & w_u \end{cases}$ est bien définie.

7. Soit $u, v \in X$. Montrer que, pour presque tout $t \in (0,T)$,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\|w_u(t) - w_v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + 2\,\|w_u(t) - w_v(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &= 2\int_\Omega (w_u(t) - w_v(t))(f(u)(t) - f(v)(t)). \end{aligned}$$

8. En déduire que, pour tout $\epsilon > 0$ et pour presque tout $t \in (0,T)$,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\|w_u(t) - w_v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + 2\,\|w_u(t) - w_v(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &\qquad \leqslant \epsilon\|w_u(t) - w_v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon}\|f(u)(t) - f(v)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

9. En déduire qu'il existe une constante $K > 0$, indépendante de u et v et que l'on déterminera en fonction de la constante de l'inégalité de Poincaré, telle que, pour presque tout $t \in (0,T)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\|w_u(t) - w_v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \leqslant K\,\|f(u)(t) - f(v)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En déduire que, pour presque tout $t \in (0,T)$,

$$\frac{d}{dt}\left(\|w_u(t) - w_v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \leqslant C'K\,\|u(t) - v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

où C' est une constante que l'on déterminera en fonction de la constante de Lipschitz de f.

10. En déduire que, pour tout $u, v \in X$,

$$\|w_u - w_v\|^2_X \leqslant C'KT\|u - v\|^2_X.$$

11. En déduire que, si T est choisi suffisamment petit (plus petit qu'une constante que l'on déterminera en fonction de C' et K), l'application A définie à la question 6. est une application contractante. Montrer que, si T est choisi plus petit que cette constante, il existe un unique $u^* \in X$ tel que $u^* = w_{u^*}$. Montrer de plus que u^* est une solution faible du problème (1) au sens de la définition 1.
12. En déduire que pour tout $T > 0$, il existe au moins une solution faible u du problème (1) au sens de la Définition 1.
13. Montrer que si u, v sont deux solutions faibles de (1) au sens de la Définition 1, alors pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \leqslant C'K \|u(t) - v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

En déduire qu'il existe une unique solution faible de (1).

Remarque 1. *En fait, on peut également montrer que si $g \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors l'unique solution faible u de (1) est plus régulière et appartient à l'espace $L^\infty((0,T); L^\infty(\Omega))$.*

Partie II : Cas de non-existence

On considère à présent le problème (1) avec la fonction f définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Noter que, dans ce cas, la fonction f n'est pas Lipschitz et que les hypothèses de la Partie I ne sont plus satisfaites. On ne sait donc pas a priori ici s'il existe une solution de (1). Noter en particulier que, si $u \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega))$, la fonction $f(u) = u^2$ n'est pas une fonction de $L^2((0,T), L^2(\Omega))$ (c'est juste une fonction de $L^1((0,T), L^1(\Omega))$). On ne sait donc pas donner un sens au terme $\displaystyle\int_\Omega f(u)(t)v$ apparaissant dans (C1) pour $v \in H_0^1(\Omega)$.

En revanche, si on suppose un peu plus de régularité sur la solution u, on peut toujours donner un sens à ce terme. C'est l'objet de la première question de cette partie.

1. Montrer que si $u \in L^\infty((0,T); L^\infty(\Omega))$, alors $f(u) \in L^2((0,T); L^2(\Omega))$.

On peut du coup légitimement se poser la question de l'existence d'une solution de (1) suffisamment régulière pour que (C1) ait un sens. Nous allons en fait montrer dans cette partie un résultat de **non-existence** de solutions régulières. Plus précisément, nous allons montrer qu'il existe $T > 0$ et $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ tels qu'**il n'existe pas de solution $u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty((0,T); L^\infty(\Omega))$ telle que $u' \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$ et telle que (C1) et (C2) soient vérifiées**. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe une telle solution que nous noterons u.

2. Montrer que, si $g \geqslant 0$, alors $u \geqslant 0$ sur $(0,T) \times \Omega$.

On admettra dans la suite que, si $g \geqslant 0$, $g \neq 0$ alors $u > 0$ sur $(0,T) \times \Omega$.

Soit $w_1 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ la première fonction propre de l'opérateur Laplacien avec conditions aux bords de Dirichlet telle que $\|w_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et soit λ_1 la valeur propre associée (λ_1 est donc la plus petite valeur propre de l'opérateur Laplacien avec conditions aux bords de Dirichlet). On rappelle alors que

$$-\Delta_x w_1 = \lambda_1 w_1 \quad \text{dans } \Omega,$$

et que $w_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

3. Montrer que $w_1 \in L^1(\Omega)$.

 On admettra dans la suite que $w_1 > 0$ dans Ω si bien que $\displaystyle\int_\Omega w_1 > 0$, et on notera

$$v_1 := \frac{w_1}{\int_\Omega w_1}.$$

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\chi \geqslant 0$ et telle que $\chi > 0$ sur un sous-ensemble $\omega \subset \Omega$ de mesure de Lebesgue strictement positive.

4. Montrer que $\chi v_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et que $\int_\Omega \chi v_1^2 > 0$. En déduire qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $A \int_\Omega \chi v_1^2 > \lambda_1$.

 On supposera également dans la suite que la condition initiale est choisie telle que

$$g = A\chi v_1,$$

avec $A > 0$ une constante satisfaisant les conditions de la question 4. On notera dans la suite

$$G := \int_\Omega g v_1.$$

5. Montrer que la fonction $\eta : [0,T] \ni t \to \displaystyle\int_\Omega u(t)v_1$ est une fonction absolument continue et strictement positive sur $[0,T]$.
6. Montrer que $\dfrac{d}{dt}\eta(t) = \langle u'(t), v_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ pour presque tout $t \in (0,T)$. En déduire que
$$\frac{d}{dt}\eta(t) = -\lambda_1\eta(t) + \int_\Omega u(t)^2 v_1.$$
7. Montrer que, pour presque tout $t \in (0,T)$,
$$\eta(t) \leqslant \left(\int_\Omega u(t)^2 v_1\right)^{1/2} \left(\int_\Omega v_1\right)^{1/2}.$$
 En déduire que, pour presque tout $t \in (0,T)$,
$$\eta(t)^2 \leqslant \int_\Omega u(t)^2 v_1.$$

8. Montrer que, pour presque tout $t \in (0,T)$,

$$\frac{d}{dt}\eta(t) \geqslant -\lambda_1\eta(t) + \eta(t)^2.$$

9. On définit, pour tout $t \in [0,T]$, $\xi(t) := e^{\lambda_1 t}\eta(t)$. Montrer que ξ est strictement positive et absolument continue sur $[0,T]$ et que, pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\xi(t)}\right) \geqslant e^{-\lambda_1 t}.$$

10. En déduire que, pour tout $t \in [0,T]$ tel que $\lambda_1 - \xi(0)(1-e^{-\lambda_1 t}) \neq 0$,

$$\xi(t) \geqslant \frac{\xi(0)\lambda_1}{\lambda_1 - \xi(0)(1-e^{-\lambda_1 t})}.$$

11. En utilisant le résultat de la question 4., en déduire que $\xi(t) \underset{t\to t^*}{\longrightarrow} +\infty$ où

$$t^* := -\frac{1}{\lambda_1}\ln\left(\frac{G-\lambda_1}{G}\right).$$

On vérifiera que $t^* > 0$.

12. En utilisant le résultat de la question 5., en déduire une contradiction si $T > t^*$. Conclure.