Problèmes d'évolution

Frédéric Legoll et Pierre Lissy

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

frederic.legoll@enpc.fr

http://cermics.enpc.fr/∼legoll/pbevol.html

Formation en première année

Première année ENPC: outils fondamentaux pour l'analyse mathématique et numérique des Equations aux Dérivées Partielles:

- cours "Analyse et Calcul scientifique" au S1
- cours "EDP: approches variationnelles" au S2

complétés par "Controle / analyse fonctionnelle" au S3, ...

Compréhension des méthodes numériques pour la résolution de problèmes linéaires:

$$-\Delta u = f \quad \text{et Conditions aux Limites}$$

Introduction à quelques problèmes non-linéaires via l'optimisation:

$$\inf \{J(u), \quad u \in V, \quad \text{Contraintes sur } u\}$$

Contenu du cours

Le cours va comporter trois grandes parties:

- Théorie spectrale (théorie et numérique)
- Etude des problèmes d'évolution (théorie et numérique, transformée de Fourier)
- Lois de conservation (équations hyperboliques)

Théorie spectrale - 1

- Problème au second membre:

$$Au = f \qquad \text{[Penser à } -\Delta u = f\text{]}$$

Outil fondamental: le théorème de Lax-Milgram.

- Problème aux valeurs propres:

$$Au = \lambda u \qquad \text{[Penser à } -\Delta u = \lambda u\text{]}$$

Outil fondamental: la diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts.

Objectif: généraliser à la dimension infinie le résultat suivant:

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Théorie spectrale - 2

Passer du problème en dimension infinie

$$Au = \lambda u, \qquad u \in V,$$

à son approximation numérique, en dimension finie:

$$A_h u_h = \lambda_h u_h, \qquad u_h \in V_h,$$

avec (typiquement)

$$V_h = \text{espace d'éléments finis} \subset V.$$

Estimation d'erreur sur $\|u - u_h\|$ et sur $|\lambda - \lambda_h|$.

Cette thématique nous occupera en gros 4 séances.

Problèmes d'évolution - 1

Problèmes dépendant du temps:

$$\begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u & = & f & \qquad \text{Equation de la chaleur} \\ \partial_{tt} u - \Delta u & = & f & \qquad \text{Equation des ondes} \end{array}$$

Deux manières complémentaires d'aborder le problème:

- Approche par Galerkin: on écrit formellement une formulation variationnelle, du type

  $$\forall v \in V, \qquad \partial_t \langle u(t), v \rangle + a(u,v) = b(v) \qquad \text{avec } a(u,v) = \int \nabla u \cdot \nabla v$$

  qu'on discrétise (formellement) dans $V_h \subset V$:

  $$\forall v_h \in V_h, \qquad \partial_t \langle u_h(t), v_h \rangle + a(u_h, v_h) = b(v_h).$$

  Ceci conduit à une EDO (en dimension $\dim V_h \sim h^{-d}$), d'où l'existence rigoureuse de $u_h(t)$. Puis on passe à la limite $h \to 0$.

Problèmes d'évolution - 2

Problèmes dépendant du temps:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \qquad \text{Equation de la chaleur} \\ \partial_{tt} u - \Delta u &= f \qquad \text{Equation des ondes} \end{aligned} \tag{1}$$

Deux manières complémentaires d'aborder le problème:

- Approche spectrale: on décompose la solution sur les modes propres du laplacien:

$$-\Delta e_k = \lambda_k e_k$$

et on écrit formellement $u(t,x) = \sum_k \alpha_k(t) e_k(x)$.

Dans le cas spécifique de problèmes à coefficients constants, résolution par l'utilisation de la transformée de Fourier.

Cette thématique nous occupera 4 séances.

Lois de conservation

Equations de la forme

$$\partial_t u + \text{div } f(u) = 0$$

qui modélisent la conservation d'une quanité physique.

Penser à la conservation de la masse en mécanique des fluides:

$$\partial_t \rho + \text{div } (\rho \, v) = 0$$

où ρ est la masse volumique et v la vitesse du fluide.

Notes de cours en deux parties:
– théorie spectrale (aujourd'hui)
– lois de conservation et problèmes d'évolution

Les notes de cours contiennent BEAUCOUP plus que le programme.

Planning du cours

- Seances 1 à 4 (27 février au 2 avril): théorie spectrale (F. Legoll)
- Séances 5 à 8 (9 avril au 7 mai): lois de conservation (P. Lissy)
- Séances 9 à 12 (14 mai au 4 juin): problèmes d'évolution (P. Lissy)
- Examen le 11 juin

Beaucoup d'informations sur

`http://cermics.enpc.fr/~legoll/pbevol.html`

et sur la page educnet du cours.