

Problèmes d'évolution

Frédéric Legoll et Pierre Lissy

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

`frederic.legoll@enpc.fr`

`http://cermics.enpc.fr/~legoll/pbevol.html`

Première année ENPC: outils fondamentaux pour l'analyse mathématique et numérique des Equations aux Dérivées Partielles:

- cours "Analyse et Calcul scientifique" au S1
- cours "EDP: approches variationnelles" au S2

complétés par "Contrôle / analyse fonctionnelle" au S3, ...

Compréhension des méthodes numériques pour la résolution de problèmes **linéaires**:

$$-\Delta u = f \quad \text{et Conditions aux Limites}$$

Introduction à quelques problèmes **non-linéaires** via l'optimisation:

$$\inf \{J(u), \quad u \in V, \quad \text{Contraintes sur } u\}$$

Le cours va comporter trois grandes parties:

- Théorie spectrale (théorie et numérique)
- Etude des problèmes d'évolution (théorie et numérique, transformée de Fourier)
- Lois de conservation (équations hyperboliques)

- Problème au **second membre**:

$$Au = f \quad [\text{Penser à } -\Delta u = f]$$

Outil fondamental: le théorème de Lax-Milgram.

- Problème aux **valeurs propres**:

$$Au = \lambda u \quad [\text{Penser à } -\Delta u = \lambda u]$$

Outil fondamental: la diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts.

Objectif: généraliser à la dimension infinie le résultat suivant:

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Passer du problème en **dimension infinie**

$$Au = \lambda u, \quad u \in V,$$

à son approximation numérique, en **dimension finie**:

$$A_h u_h = \lambda_h u_h, \quad u_h \in V_h,$$

avec (typiquement)

$$V_h = \text{espace d'éléments finis} \subset V.$$

Estimation d'erreur sur $\|u - u_h\|$ et sur $|\lambda - \lambda_h|$.

Cette thématique nous occupera en gros 4 séances.

Problèmes d'évolution - 1

Problèmes **dépendant du temps**:

$$\partial_t u - \Delta u = f \quad \text{Equation de la chaleur}$$

$$\partial_{tt} u - \Delta u = f \quad \text{Equation des ondes}$$

Deux manières complémentaires d'aborder le problème:

- **Approche par Galerkin**: on écrit formellement une formulation variationnelle, du type

$$\forall v \in V, \quad \partial_t \langle u(t), v \rangle + a(u, v) = b(v) \quad \text{avec } a(u, v) = \int \nabla u \cdot \nabla v$$

qu'on discrétise (formellement) dans $V_h \subset V$:

$$\forall v_h \in V_h, \quad \partial_t \langle u_h(t), v_h \rangle + a(u_h, v_h) = b(v_h).$$

Ceci conduit à une EDO (en dimension $\dim V_h \sim h^{-d}$), d'où l'existence rigoureuse de $u_h(t)$. Puis on passe à la limite $h \rightarrow 0$.

Problèmes d'évolution - 2

Problèmes **dépendant du temps**:

$$\begin{aligned}\partial_t u - \Delta u &= f && \text{Equation de la chaleur} \\ \partial_{tt} u - \Delta u &= f && \text{Equation des ondes}\end{aligned}\tag{1}$$

Deux manières complémentaires d'aborder le problème:

- **Approche spectrale**: on décompose la solution sur les modes propres du laplacien:

$$-\Delta e_k = \lambda_k e_k$$

et on écrit formellement $u(t, x) = \sum_k \alpha_k(t) e_k(x)$.

Dans le cas spécifique de **problèmes à coefficients constants**, résolution par l'utilisation de la **transformée de Fourier**.

Cette thématique nous occupera 4 séances.

Equations de la forme

$$\partial_t u + \operatorname{div} f(u) = 0$$

qui modélisent la conservation d'une quantité physique.

Penser à la conservation de la masse en mécanique des fluides:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} (\rho v) = 0$$

où ρ est la masse volumique et v la vitesse du fluide.

Les notes de cours contiennent BEAUCOUP plus que le programme.

Planning du cours

- Séances 1 à 4 (11 février au 18 mars): théorie spectrale (F. Legoll)
- Séances 5 à 8 (8 avril au 6 mai): lois de conservation (P. Lissy)
- Séances 9 à 12 (13 mai au 3 juin): problèmes d'évolution (P. Lissy)
- Examen le 10 juin

Beaucoup d'informations sur

<http://cermics.enpc.fr/~legoll/pbev01.html>

et sur la page educnet du cours.