

Proposition de stage de M2
Année universitaire 2021-2022

Approches numériques des problèmes de défauts dans les équations de réaction-diffusion à coefficients oscillants

Nous étudions mathématiquement et implémentons numériquement des approches possibles pour l'approximation, à la fois à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique, de la solution d'une équation de réaction-diffusion

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t, x) - \operatorname{div} (a(x/\varepsilon) \nabla u^\varepsilon(t, x)) + \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon(t, x) = f(t, x) \quad (1)$$

dont les coefficients oscillants de diffusion $a(x/\varepsilon)$ et de réaction $\sigma(x/\varepsilon)$ sont des perturbations "locales" de fonctions ayant des propriétés géométriques simples, par exemple des fonctions périodiques. La perturbation locale représente typiquement un "défaut" microscopique présent dans le milieu ambiant. Comme dans tout problème à plusieurs échelles, l'approximation numérique de la solution u^ε , pour ε petit, requiert souvent des discrétisations trop coûteuses et il s'agit donc d'adopter d'autres approches. Ces approches ont déjà été mises en oeuvre sur des problèmes de difficulté similaire [2, 3] et le travail s'en inspirera.

Le stage se focalisera sur certains aspects théoriques, ou numériques (selon le profil et le souhait du candidat) liés précisément à la théorie dite de l'homogénéisation [1], et les méthodes numériques multi-échelles (dont les approches dites "MsFEM" [4]). Les rudiments de ces notions seront, au besoin, enseignées au début du stage.

Une bonne culture des notions de base d'analyse fonctionnelle, d'analyse des équations aux dérivées partielles, de mise en oeuvre de la méthode des éléments finis, sera utile.

Le stage se déroulera (à discuter) au laboratoire CERMICS-ENPC à Marne-La-Vallée, ou à Inria Paris. Bien sûr, en fonction de la situation sanitaire dans la région parisienne, des aménagements de télétravail pourront être considérés. Le stage pourra éventuellement déboucher sur une thèse. Une possibilité de collaboration avec l'Université de Besançon sera évoquée. Le travail est en partie supporté par des contrats auprès de l'EOARD (Grant FA8655-20-1-7043) et de l'ONR (Grant N00014-20-1-2691).

Encadrement scientifique:

- Frédéric LEGOLL (frederic.legoll@enpc.fr) et Claude LE BRIS (claudel.le-bris@enpc.fr), Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 6 & 8, Avenue Blaise Pascal, Marne-La-Vallée (RER A, station Noisy-Champs) et Inria Paris, rue Simone Iff, 75012 Paris (RER A, station Gare de Lyon, et Métro 6, station Dugommier).
- Alexei LOZINSKI (alexei.lozinski@univ-fcomte.fr), Université de Besançon, en délégation à Inria Paris.

References

- [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, **Asymptotic analysis for periodic structures**, Studies in Mathematics and its Applications, 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [2] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, *A possible homogenization approach for the numerical simulation of periodic microstructures with defects*, Milan Journal of Mathematics, vol. 80 (2012) 351–367.
- [3] C. Le Bris, F. Legoll, A. Lozinski, *MsFEM à la Crouzeix-Raviart for highly oscillatory elliptic problems*, Chin. Ann. Math. Ser. B, vol. 34(1) (2013) 113–138.
- [4] Y. Efendiev, Th. Y. Hou, **Multiscale finite element methods. Theory and applications**, 2009, New York, Springer.