Cours méthodes numériques probabilistes

Exercices

Novembre 2007

1 Variables aléatoires et théorèmes limites

Exercice 1 Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Donner la loi du couple

$$(X, Y) = \left(\frac{U^{1/2}}{U^{1/2} + V^{1/2}}, U^{1/2} + V^{1/2} \right)$$

2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

3. Donner la loi de X.

Exercice 2

1. Soit $N : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire entière. On définit sa fonction génératrice ϕ_N par la relation suivante:

$$\forall s \in [-1, 1],\ \phi_N(s) = \mathbb{E}(s^N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{N = n\} s^n$$

Comme série entière de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$ avec $\sum |a_n| < \infty$, la fonction ϕ_N est continue sur $[-1, 1]$ et C^∞ sur $] - 1, 1[$.

   (a) Calculer la dérivée n-ième $\phi_N^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que ϕ_N caractérise la loi de N.

   (b) Montrer que pour $s \in] - 1, 1[$, on a $\phi'_N(s) = \mathbb{E}[N s^{N-1}]$.

   (c) Montrer que N est intégrable si et seulement si $\phi'_N(s)$ admet une limite à gauche finie en 1. Montrer que dans ce cas:

$$\mathbb{E}(N) = \lim_{s \to 1^-} \phi'_N(s)$$

   (d) Soient N_1 et N_2 deux variables entières positives indépendantes. Montrer que $\phi_{N_1+N_2} = \phi_{N_1} \phi_{N_2}$

2. À chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, un joueur joue à un jeu de hasard. Sa probabilité de succès est $p \in]0, 1]$. On note $(T_i)_{i \geq 1}$ la suite des instants de succès. On note également $(X_i)_{i \geq 1}$ la suite i.i.d. de variables de Bernoulli valant 1 si le joueur a un succès à l'instant i et 0 sinon.

(a) Rappeler la loi de T_1. Montrer que sa fonction génératrice est donnée par:

$$\forall s \in [-1,1],\ \phi_{T_1}(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$$

(b) Soient $(n_1, \ldots, n_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$. Montrer que

$$\begin{aligned}&\{T_1 = n_1, T_2 - T_1 = n_2, \ldots, T_k - T_{k-1} = n_k\}\\ &\quad = \{X_1 = 0, \ldots, X_{n_1-1} = 0, X_{n_1} = 1, X_{n_1+1} = 0, \ldots,\\ &\qquad X_{n_1+n_2-1} = 0, X_{n_1+n_2} = 1, X_{n_1+n_2+1} = 0, \ldots, X_{n_1+\cdots+n_k} = 1\}\end{aligned}$$

(c) En déduire que les variables $(T_i - T_{i-1})_{i\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p. (On aura posé $T_0 = 0$.)

(d) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Déduire de ce qui précède la fonction génératrice G et la loi de T_r.

(e) En exprimant directement l'évènement $\{T_r = n\}$ à partir de X_n et de $X_1 + \cdots + X_{n-1}$, retrouver directement ce résultat.

3. On veut modéliser, par exemple, un jeu de type roulette où la banque récupère l'ensemble des mises dès que le zéro apparaît. À cette fin, on suppose s'être donné un jeu qui s'arrête après un nombre aléatoire de coups de fonction génératrice G (en reprenant la question précédente, on pourraît imaginer que le joueur ramasse le gros lot dès qu'il a accumulé r succès, c'est-à-dire à l'instant T_r). On introduit le rôle de la banque en supposant qu'il soit possible qu'à chaque coup, la partie en cours se temine brutalement et reprenne à zéro à l'instant suivant. On s'intéresse dans l'exercice qui suit à la durée de ce jeu. On fait les hypothèses plus précises suivantes:

   (a) Les remises à zéro de la partie interviennent à des instants aléatoires $D_1, D_1+D_2, \ldots, D_1+D_2+\cdots+D_i, \ldots$, où la suite $(D_i)_{i\geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables géométriques de paramètre $\lambda \in]0,1[$.

   (b) On considère une suite i.i.d. $(S_i)_{i\geq 1}$ de variables entières, strictement positives, de même loi, et de fonction génératrice commune G. Ces variables représentent les tentatives successives de terminer le jeu en l'absence de remise à zéro de la partie.

   (c) On suppose les suites $(D_i)_{i\geq 1}$ et $(S_i)_{i\geq 1}$ indépendantes.

   (d) On désigne par N le premier indice i pour lequel $S_i < D_i$:

   $$N = \inf\{i \geq 1 :\ S_i < D_i\}$$

   (e) On note $X_i = \min\{S_i, D_i\}$. La suite$(X_i)_{i\geq 1}$ est clairement à son tour une suite de variables indépendantes et de même loi.

Lors des $N-1$ premières reprises du jeu, la partie est interrompue au bout de D_i coup, la N-ième reprise est la bonne et elle s'achève au bout de S_N coups. Avec ces notations, la durée Z du jeu s'écrit donc:

$$Z = \sum_{i=1}^{N-1} D_i + S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

(a) En écrivant $\{S_1 < D_1\} = \cup_{n=1}^{+\infty}\{S_1 < D_1, S_1 = n\}$, montrer que

$$\mathbb{P}\{S_1 < D_1\} = G(1-\lambda)$$

(b) Montrer que N est une variable géométrique de paramètre $G(1-\lambda)$.

(c) i. Justifier l'écriture

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[X_i \mathbf{1}_{\{N\geq i\}}\right]$$

ii. Montrer que $\mathbf{1}_{\{N\geq i\}}$ est indépendant de X_i et en déduire que

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1)\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{N \geq i\}$$

iii. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{N \geq i\} = \mathbb{E}(N)$$

On conclut donc que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N)$.

(d) Vérifier que

i. $\mathbb{E}(X_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\min(n, D_1))\mathbb{P}\{S_1 = n\}$,

ii. $\mathbb{E}\left((D_1 - n)1_{\{D_1 > n\}}\right) = \frac{(1-\lambda)^n}{\lambda}$.

(e) En remarquant que $\min(n, D_1) = D_1 - (D_1 - n)1_{\{D_1>n\}}$, en déduire que

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1 - G(1-\lambda)}{\lambda}$$

puis conclure que

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1 - G(1-\lambda)}{\lambda G(1-\lambda)}.$$

(f) En supposant $\mathbb{E}(S_1) < +\infty$ donner les limites de $\frac{1-G(1-\lambda)}{\lambda G(1-\lambda)}$ pour $\lambda \to 0$ et $\lambda \to 1$. Interpréter.

Exercice 3 1. *Réduction de variance par variable de contrôle.* On considère le prix d'une option (call) sur deux actifs financiers :

$$p = \mathbb{E}((\lambda_1 \exp(\sigma_1 G_1) + \lambda_2 \exp(\sigma_2 G_2) - K)_+),$$

où G_1 et G_2 sont indépendantes et suivent une loi normale centrée réduite et $x_+ = \max(x, 0)$ désigne la partie positive de $x \in \mathbb{R}$. Programmer et comparer numériquement les variances empiriques de chacune des méthodes suivantes (on pourra prendre $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$, $K = 10$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$):

(a) Méthode de Monte Carlo sans réduction de variance,

(b) Méthode de Monte Carlo avec comme variable de contrôle le prix du put :

$$(K - \lambda_1 \exp(\sigma_1 G_1) - \lambda_2 \exp(\sigma_2 G_2))_+$$

(c) Méthode de Monte Carlo avec comme variable de contrôle

$$\left((\lambda_1 + \lambda_2) \exp\left(\frac{\lambda_1 \sigma_1}{\lambda_1 + \lambda_2} G_1 + \frac{\lambda_2 \sigma_2}{\lambda_1 + \lambda_2} G_2\right) - K\right)_+$$

(On utilisera des approximations de la fonction de répartition de la gaussienne, fonction `cdfnor` *sous Scilab, par exemple.)*

2. *Réduction de variance par échantillonnage préférentiel.* On reprend l'exemple du calcul du prix d'un put

$$p = \mathbb{E}((1 - \exp(\sigma G))_+),$$

où G suit une loi normale centrée réduite.

(a) En utilisant le fait que $\exp(x) - 1$ est proche de x pour x petit, on propose d'écrire p sous la forme:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \exp(\sigma x))_+}{|x|} |x| \exp(-x^2/2)\, dx.$$

En introduisant le changement de variable $x = \sqrt{y}$, montrer que l'on peut écrire:

$$p = \mathbb{E}\left(\frac{(1 - \exp(\sigma\sqrt{Y}))_+ + (1 - \exp(-\sigma\sqrt{Y}))_+}{\sqrt{2\pi}\sqrt{Y}}\right),$$

où Y suit une loi exponentielle de paramètre $1/2$.

(b) Comparer numériquement les variances empiriques des résultats obtenus par méthode de Monte Carlo, avec et sans réduction de variance.

2 Chaînes de Markov

Exercice 4 Soit X_n l'état d'un stock de pièces à l'instant n, D_{n+1} la demande (supposée aléatoire) formulée par le client entre les instants n et $n+1$ et $q \in \mathbb{N} \setminus 0$ la quantité (supposée déterministe) de pièces fabriquées entre les instants n et $n+1$. La suite X_n vérifie:

$$X_{n+1} = (X_n + q - D_{n+1})_+ \tag{1}$$

où $x_+ = \max(x, 0)$ désigne la partie positive de $x \in \mathbb{R}$. On suppose que les variables aléatoires $(D_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. à valeur dans $\mathbb{N}$, de loi $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(D_1 = k)$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

2. On suppose dans cette question que $q = 1$, et que la demande ne peut prendre que trois valeurs: 0, 1 ou 2. On suppose que p_0, p_1 et p_2 sont strictement positives.

   (a) Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible.
   (b) Calculer la probabilité invariante si $\mathbb{E}(D_1) > 1$.
   (c) En déduire que si $\mathbb{E}(D_1) > 1$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ possède une limite p.s. et la calculer.

3. Montrer que si $\mathbb{P}(D_1 > q) > 0$ et $\mathbb{P}(D_1 = q - 1) > 0$, alors la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible. *(On pourra démontrer et utiliser la propriété: pour tout $k, j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{k+j} = k|X_0 = j) \geq \mathbb{P}(X_k = k|X_0 = 0)\,\mathbb{P}(X_j = 0|X_0 = j)$.)*

4. On suppose que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible, et que

   $$\mathbb{E}(D) > q.$$

   On veut montrer que la chaîne possède une unique probabilité invariante. On introduit

   $$T = \inf(n \geq 1,\ X_n^0 = 0).$$

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur T pour l'existence et l'unicité de la probabilité invariante.
   (b) On introduit la chaîne de Markov $Y_{n+1} = Y_n + q - D_{n+1}$, telle que $Y_0 = 0$. Montrer que, pour tout $\lambda \geq 0$,

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > n) &= \mathbb{P}(Y_1 > 0, \ldots, Y_n > 0),\\ &\leq \mathbb{P}(Y_n > 0),\\ &\leq \mathbb{E}(\exp(\lambda Y_n)),\\ &= \exp(n\lambda q)(g(\lambda))^n,\end{aligned}$$

   où $g(\lambda) = \mathbb{E}(\exp(-\lambda D_1))$ est la transformée de Laplace de D_1.

(c) Vérifier que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(0, \infty)$. Calculer $g'(\lambda)$ et en déduire que $g(\lambda) < 1 - \lambda q$ pour $\lambda > 0$ suffisamment petit. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T > n)$ est convergente.

(d) Montrer que $\mathbb{E}(T) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T > n)$ et conclure.

Exercice 5 Pour modéliser la situation météorologique au cours des jours, on considère une chaîne de Markov sur les états (soleil, nuage, pluie) de matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Tracer le graphe associé à la chaîne de Markov. La chaîne est-elle irréductible, apériodique, fortement irréductible ? Déterminer sa loi invariante π. La chaîne est-elle réversible par rapport à π ? Par un calcul direct, évaluer $\|\nu P^n - \pi\|_1$. Appliquer les résultats généraux du cours sur les vitesses de convergence de νP^n vers π, et comparer à la vitesse obtenue par le calcul direct.

Exercice 6 Soit P_1 et P_2 deux matrices de transition fortement irréductibles, sur un espace d'état $E = \{a, b, c\}$. Soit I_n une chaîne de Markov sur l'espace d'état $\{1, 2\}$ de transition $Q(1, 2) = Q(2, 1) = p$, et $Q(1, 1) = Q(2, 2) = 1 - p$, pour $0 < p < 1$. On définit alors le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ de la manière suivante: sachant I_n, X_n est une chaîne de Markov inhomogène de matrice de transition P_{I_n}.

1. Montrer que $(X_n, I_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov dont on déterminera la matrice de transition.

2. Vérifier que $(X_n)_{n \geq 0}$ n'est pas une chaîne de Markov.

Exercice 7 On veut engendrer une permutation aléatoire de loi π uniforme sur l'ensemble $E = \mathcal{S}_n$ des permutations sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On considère la transition P sur E qui consiste à composer par une permutation sur deux indices i et j choisis au hasard de manière uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que P est π-réversible. En déduire une méthode numérique pour tirer au hasard une permutation.