Corrigé de l'examen du cours de M2 : Méthodes numériques probabilistes

9 janvier 2013, 09h00 - 12h00.

Les notes de cours sont autorisées.

Exercice 1 : Echantillonnage d'importance

1.1 Noter que le rapport fp/q est bien défini par l'hypothèse $q(x) = 0 \Longrightarrow f(x)p(x) = 0$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}(S_n) = I$ et $\mathrm{Var}(S_n) = \frac{v_1(q)}{n}$. On a donc, dans la limite $n \to \infty$,

$$I \in \left[S_n - \alpha\sqrt{\frac{v_1(q)}{n}}, S_n + \alpha\sqrt{\frac{v_1(q)}{n}} \right]$$

avec une probabilité de 95% quand $\alpha \simeq 1.96$.

1.2 Pour minimiser la longueur de l'intervalle, il faut minimiser $v_1(q)$ par rapport à q. Cela revient à minimiser $\int \frac{f^2p^2}{q}$ par rapport à q. On a classiquement, par Cauchy-Schwarz

$$\int \frac{f^2p^2}{q} \geq \left(\int \frac{|f|p}{q} q \right)^2$$

et on note que la borne inférieure$\left(\int \frac{|f|p}{q} q \right)^2 = \left(\int |f|p \right)^2$ est atteinte pour $q_1^* = |f|p / \int |f|p$. Dans ce cas, on a donc

$$v_1(q_1^*) = \left(\int |f|p \right)^2 - I^2 = v_1^*.$$

2.1 On a

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f\tilde{p}}{\tilde{q}}(Y_i)}{\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}(Y_i)} \\ &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{fp}{q}(Y_i)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{p}{q}(Y_i)}. \end{aligned}$$

Dans la limite $n \to \infty$, la limite presque sûre du numérateur est I et la limite presque sûre du dénominateur est 1 (par la loi forte des grands nombres). On a donc, presque sûrement, $\lim_{n\to\infty} R_n = I$. L'intérêt pratique de R_n comparativement à S_n est qu'il ne nécessite de connaître p et q qu'à une constante multiplicative près.

On peut penser notamment à des applications en physique statistique où la densité cible est la mesure de Boltzmann-Gibbs $Z^{-1}\exp(-\beta V(x))$ (où β est l'inverse de la température et V la fonction potentiel), et la constante de normalisation Z n'est pas connue en général.

2.2 On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(R_n - I) &= \sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{f\tilde{p}}{\tilde{q}}(Y_i)}{\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}(Y_i)} - I\right)\\ &= \sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{(f-I)p}{q}(Y_i)}{\sum_{i=1}^n \frac{p}{q}(Y_i)}\right)\\ &= \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{p}{q}(Y_i)}\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{(f-I)p}{q}(Y_i)\right).\end{aligned}$$

Par la loi forte des grands nombres, on a, presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{p}{q}(Y_i)} = 1.$$

Par le théorème central limite, on a, en loi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{(f-I)p}{q}(Y_i)\right) = \mathcal{N}(0, v_2(q)),$$

puisque $\mathbb{E}\left(\frac{(f-I)p}{q}(Y_1)\right) = 0$ et $\mathrm{Var}\left(\frac{(f-I)p}{q}(Y_1)\right) = \int \frac{\bar{f}^2p^2}{q^2}q = v_2(q)$. Par le théorème de Slutsky, on en déduit que $\sqrt{n}(R_n - I)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, v_2(q))$ dans la limite $n \to \infty$, et donc,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{n}{v_2(q)}}(R_n - I) \in (-\alpha, \alpha)\right) = 0.95$$

(avec $\alpha \simeq 1.96$). Et donc, avec une probabilité de 95%, dans la limite $n \to \infty$,

$$I \in \left[R_n - \alpha\sqrt{\frac{v_2(q)}{n}}, R_n + \alpha\sqrt{\frac{v_2(q)}{n}}\right]$$

quand $\alpha \simeq 1.96$.

2.3 Par Cauchy-Schwarz, on a

$$\int \frac{\bar{f}^2p^2}{q} \geq \left(\int \frac{|\bar{f}|p}{q}q\right)^2$$

et le minorant $\left(\int \frac{|\bar{f}|p}{q}q\right)^2 = \left(\int |\bar{f}|p\right)^2$ est atteint pour $q(x) = q_2^*(x) = |\bar{f}|(x)p(x)/\int |\bar{f}|p$. On minimise la longueur de l'intervalle de confiance en minimisant $v_2(q)$ par rapport à q, et donc en choisissant $\tilde{q}$ proportionnel à $|\bar{f}|p$.

2.4 On peut par exemple utiliser un algorithme de Metropolis Hastings.

3.1 A la constante multiplicative $\frac{2\alpha}{\sqrt{n}}$ près, $\sqrt{v_1^*}$ et $\sqrt{v_2^*}$ représentent la longueur des intervalles de confiance optimaux associés aux estimateurs S_n et R_n respectivement, correspondant aux choix $q = q_1^*$ et $q = q_2^*$ respectivement.

On a

$$\begin{aligned} v_1^* &= \left(\int |f| p \right)^2 - I^2 \\ &= \left(\int (f^+ + f^-) p \right)^2 - \left(\int (f^+ - f^-) p \right)^2 \\ &= 4 \left(\int f^+ p \right) \left(\int f^- p \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $0 = \int \bar{f} p = \int \left(\bar{f}^+ - \bar{f}^- \right) p$, on a

$$\begin{aligned} v_2^* &= \left(\int |\bar{f}| p \right)^2 \\ &= \left(\int \left(\bar{f}^+ + \bar{f}^- \right) p \right)^2 \\ &= 4 \left(\int \bar{f}^+ p \right)^2. \end{aligned}$$

3.2 Dans ce cas, on a $v_1^* = 0$ (puisque $f^+ = 0$ ou $f^- = 0$ sur $\mathrm{Supp}(p)$), alors que $v_2^* > 0$.

3.3 Dans ce cas particulier, on a

$$\begin{aligned} v_1^* &= 4 \left(\int_{\mathbb{R}} f^+ p \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f^- p \right) \\ &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(\int_0^b 1 \, dx \right) \left(\int_a^0 (-x) \, dx \right) \\ &= \frac{2a^2 b}{(b-a)^2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} fp \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^0 x \, dx + \int_0^b dx \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \left(-\frac{a^2}{2} + b \right) \end{aligned}$$

qui est positif puisque $b > a^2/2$. Par ailleurs, on vérifie que $I < 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} v_2^* &= 4 \left(\int_{\mathbb{R}} \bar{f}^+ p \right)^2 \\ &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(\int_a^b (f(x) - I)^+ \, dx \right)^2 \\ &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(\int_a^0 (x - I)^+ \, dx + \int_0^b (1 - I)^+ \, dx \right)^2 \\ &= \frac{4}{(b-a)^2} b^2 (1 - I)^2. \end{aligned}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} v_1^* > v_2^* &\iff 2a^2 b > 4b^2(1-I)^2 \\ &\iff 1 > \frac{2b}{(b-a)^2}\left(-1+\frac{a}{2}\right)^2 \\ &\iff b^2 - 2ab + a^2 > 2b(1-a+a^2/4) \end{aligned}$$

ce qui est vérifié pour b assez grand.

3.4 On ne peut donc pas conclure en général lequel des deux estimateurs de I (S_n ou R_n) est le meilleur, en terme de variance asymptotique.

Exercice 2 : Itô versus Stratonovich

1.1 On note que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(X_{it/n} + X_{(i+1)t/n})(W_{(i+1)t/n} - W_{it/n}) \\ &= X_{it/n}(W_{(i+1)t/n} - W_{it/n}) + \frac{1}{2}(X_{(i+1)t/n} - X_{it/n})(W_{(i+1)t/n} - W_{it/n}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &(X_{(i+1)t/n} - X_{it/n})(W_{(i+1)t/n} - W_{it/n}) \\ &= \frac{1}{2}\left(((X_{(i+1)t/n} + W_{(i+1)t/n}) - (X_{it/n} + W_{it/n}))^2 - (X_{(i+1)t/n} - X_{it/n})^2 - (W_{(i+1)t/n} - W_{it/n})^2\right). \end{aligned}$$

On en déduit que, dans $L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(X_{(i+1)t/n} - X_{it/n})(W_{(i+1)t/n} - W_{it/n}) &= \frac{1}{2}\left(\langle X+W, X+W\rangle_t - \langle X, X\rangle_t - \langle W, W\rangle_t\right) \\ &= \langle X, W\rangle_t, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}(X_{it/n} + X_{(i+1)t/n})(W_{(i+1)t/n} - W_{it/n}) &= \int_0^t X_s dW_s + \frac{1}{2}\langle X, W\rangle_t \\ &=: \int_0^t X_s \circ dW_s. \end{aligned}$$

La règle d'intégration définissant $\int_0^t X_s \circ dW_s$ s'appelle l'intégration de Stratonovich.

1.2 Puisque $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de carré intégrable sur les intervalles bornés, on a $\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s dW_s\right) = 0$ et donc $\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s \circ dW_s\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\langle X, W\rangle_t\right)$.

2 Par le calcul d'Itô, on a

$$d(f'(W_t)) = f''(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f'''(W_t)dt.$$

Par conséquent,
$$d\langle f'(W), W\rangle_t = f''(W_t)\, dt.$$
On en déduit que
$$\begin{aligned} f'(W_t) \circ dW_t &= f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} d\langle f'(W), W\rangle_t \\ &= f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t)\, dt \\ &= d(f(W_t)) \end{aligned}$$
et donc, par intégration
$$\int_0^t f'(W_s) \circ dW_s = f(W_t) - f(0),$$
puisque $W_0 = 0$.

3.1 D'après ce qui précède, on a
$$\sigma(X_t) \circ dW_t = \sigma(X_t) dW_t + \frac{1}{2} d\langle \sigma(X), W\rangle_t,$$
et donc
$$dX_t = b(X_t)\, dt + \sigma(X_t) dW_t + \frac{1}{2} d\langle \sigma(X), W\rangle_t.$$
Il faut donc calculer le crochet $\langle \sigma(X), W\rangle_t$. Pour cela, on note que par le calcul d'Itô,
$$\begin{aligned} d\sigma(X_t) &= \sigma'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} \sigma''(X_t) \sigma^2(X_t)\, dt \\ &= \left(\sigma'(X_t) b(X_t) + \frac{1}{2} \sigma''(X_t) \sigma^2(X_t) \right) dt + \sigma'(X_t) \sigma(X_t)\, dW_t + \frac{1}{2} \sigma'(X_t) d\langle \sigma(X), W\rangle_t. \end{aligned}$$
On utilise ici le fait que $t \mapsto \langle \sigma(X), W\rangle_t$ est un processus à variations finies. On en déduit que $d\langle \sigma(X), W\rangle_t = \sigma'(X_t)\sigma(X_t)\, dt$ et donc
$$\sigma(X_t) \circ dW_t = \sigma(X_t) dW_t + \frac{1}{2} \sigma'(X_t) \sigma(X_t)\, dt,$$
d'où le résultat.

3.2 D'après les résultats vus en cours, et en partant de l'EDS établie à la question précédente, on sait que ψ satisfait l'équation de Fokker Planck :
$$\begin{aligned} \partial_t \psi &= \partial_x \left(-\left(b + \frac{1}{2} \sigma \sigma' \right) \psi \right) + \frac{1}{2} \partial_{x,x} \left(\sigma^2 \psi \right) \\ &= \partial_x \left(-\left(b + \frac{1}{2} \sigma \sigma' \right) \psi \right) + \frac{1}{2} \partial_x \left(\partial_x(\sigma) \sigma \psi + \sigma \partial_x(\sigma \psi) \right) \\ &= \partial_x \left(-b\psi + \frac{\sigma}{2} \partial_x(\sigma \psi) \right), \end{aligned}$$
avec $\psi(0, \cdot)$ qui est la densité de X_0.

3.3 Dans ce cas, $dX_t = \frac{1}{2}\sigma\sigma'(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t$. On a donc

$$\begin{aligned} d\Sigma(X_t) &= \Sigma'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\Sigma''(X_t)\sigma^2(X_t)\,dt \\ &= \frac{1}{\sigma}(X_t)\left(\frac{1}{2}\sigma\sigma'(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t\right) - \frac{1}{2}\frac{\sigma'}{\sigma^2}(X_t)\sigma^2(X_t)\,dt \\ &= dW_t. \end{aligned}$$

Par intégration, on en déduit $\Sigma(X_t) - \Sigma(X_0) = W_t$ et donc, puisque $X_0 = 0$, $\Sigma(0) = 0$, et Σ est une fonction inversible (puisque $\sigma > 0$) on en déduit que $X_t = \Sigma^{-1}(W_t)$.

Exercice 3 : Identité de Jarzynski

1 C'est une formule de Feynman-Kac. Rappelons-en la démonstration. Par un calcul d'Itô pour $r \in (s,t)$, on a

$$\begin{aligned} &d\left(w(r, X_r^{s,x}) \exp\left(-\int_s^r \partial_\lambda V(\Lambda(u), X_u^{s,x})\Lambda'(u)\,du\right)\right) \\ &= \exp\left(-\int_s^r \partial_\lambda V(\Lambda(u), X_u^{s,x})\Lambda'(u)\,du\right)\left(\partial_r w(r, X_r^{s,x}) + A_{\Lambda(r)} w(r, X_r^{s,x}) - \partial_\lambda V(\Lambda(r), X_r^{s,x})\Lambda'(r) w(r, X_r^{s,x})\right) dr \\ &\quad + \exp\left(-\int_s^r \partial_\lambda V(\Lambda(u), X_u^{s,x})\Lambda'(u)\,du\right)\sqrt{2}(\nabla_x w)(r, X_r^{s,x}) \cdot dW_r \\ &= \exp\left(-\int_s^r \partial_\lambda V(\Lambda(u), X_u^{s,x})\Lambda'(u)\,du\right)\sqrt{2}(\nabla_x w)(r, X_r^{s,x}) \cdot dW_r. \end{aligned}$$

En intégrant pour $r \in (s,t)$, puis en prenant l'espérance, on a donc :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(w(t, X_t^{s,x}) \exp\left(-\int_s^t \partial_\lambda V(\Lambda(r), X_u^{s,x})\Lambda'(u)\,du\right)\right) - w(s,x) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_s^t \exp\left(-\int_s^r \partial_\lambda V(\Lambda(u), X_u^{s,x})\Lambda'(u)\,du\right)\sqrt{2}(\nabla_x w)(r, X_r^{s,x}) \cdot dW_r\right). \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses sur $\partial_\lambda V$ et $\nabla_x w$, le processus

$$Y_r = \exp\left(-\int_s^r \partial_\lambda V(\Lambda(u), X_u^{s,x})\Lambda'(u)\,du\right)\sqrt{2}(\nabla_x w)(r, X_r^{s,x})$$

est un processus de carré intégrable :

$$\int_s^t \mathbb{E}(|Y_r|^2)\,dr < \infty$$

et donc

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t \exp\left(-\int_s^r \partial_\lambda V(\Lambda(r), X_r^{s,x})\Lambda'(r)\,dr\right)\sqrt{2}(\nabla_x w)(r, X_r^{s,x}) \cdot dW_r\right) = \mathbb{E}\left(\int_s^t Y_r \cdot dW_r\right) = 0.$$

On en déduit, puisque $w(t,\cdot) = \varphi$,

$$w(s,x) = \mathbb{E}\left(\varphi(X_t^{s,x}) \exp\left(-\int_s^t \partial_\lambda V(\Lambda(r), X_u^{s,x})\Lambda'(u)\,du\right)\right).$$

2 On a

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\int w(s,x)\exp(-V(\Lambda(s),x))\,dx \\
&= \int \exp(-V(\Lambda(s),x))\left(\partial_s w(s,x) - w(s,x)\Lambda'(s)\partial_\lambda V(\Lambda(s),x)\right)\,dx \\
&= -\int \exp(-V(\Lambda(s),x))A_{\Lambda(s)}w(x,s)\,dx \\
&= -\int \exp(-V(\Lambda(s),x))\left(-\nabla V_{\Lambda(s)}\cdot\nabla w(s,x) + \Delta w(s,x)\right)\,dx.
\end{aligned}$$

Par intégration par parties sur le dernier terme, on a

$$\begin{aligned}
\int \exp(-V(\Lambda(s),x))\Delta w(s,x)\,dx &= -\int \nabla\exp(-V(\Lambda(s),x))\cdot\nabla w(s,x)\,dx \\
&= \int \exp(-V(\Lambda(s),x))\nabla V(\Lambda(s),x)\cdot\nabla w(s,x)\,dx
\end{aligned}$$

d'où le résultat $\frac{d}{ds}\int w(s,x)\exp(-V(\Lambda(s),x))\,dx = 0$.

3 D'après la question précédente, on a

$$\int w(0,x)\exp(-V(\Lambda(0),x))\,dx = \int w(t,x)\exp(-V(\Lambda(t),x))\,dx$$

et donc, en utilisant la première question,

$$\begin{aligned}
&\int \mathbb{E}\left(\varphi\left(X_t^{0,x}\right)\exp\left(-\int_0^t \partial_\lambda V(\Lambda(u),X_u^{0,x})\Lambda'(u)\,du\right)\right)\exp(-V(\Lambda(0),x))\,dx \\
&= \int \varphi(x)\exp(-V(\Lambda(t),x))\,dx.
\end{aligned}$$

On en déduit (puisque $\Lambda(0) = 0$)

$$\begin{aligned}
&Z_0\int \mathbb{E}\left(\varphi\left(X_t^{0,x}\right)\exp\left(-\int_0^t \partial_\lambda V(\Lambda(u),X_u^{0,x})\Lambda'(u)\,du\right)\right)q_0(x)\,dx \\
&= Z_{\Lambda(t)}\int \varphi(x)q_{\Lambda(t)}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Par la propriété de Markov rappelée dans l'énoncé, on a donc :

$$\frac{Z_{\Lambda(t)}}{Z_0}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)q_{\Lambda(t)}(x)\,dx = \mathbb{E}\left(\varphi(X_t)\exp\left(-\mathcal{W}_t\right)\right).$$

4 En prenant $\varphi = 1$, et $t = T$, on a donc

$$\frac{Z_1}{Z_0} = \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mathcal{W}_T\right)\right).$$

On peut donc estimer le rapport Z_1/Z_0 est moyennant des réalisations indépendantes de $\exp(-\mathcal{W}_T)$ (en utilisant donc des réalisations indépendantes de $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ solution de l'EDS (1)). *Cette égalité s'appelle la relation de Jarzynski. Elle a été mise en évidence en 1997 [Phys. Rev. E 56, 5018–5035].*

5 On a, par Jensen,

$$\begin{aligned}
-\ln\left(\frac{Z_1}{Z_0}\right) &= -\ln \mathbb{E}\left(\exp\left(-\mathcal{W}_T\right)\right) \\
&\leq -\mathbb{E}\left(\ln \exp\left(-\ \mathcal{W}_T\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathcal{W}_T\right).
\end{aligned}$$

Puisque la fonction ln est strictement concave, on a égalité si et seulement si $\exp\left(-\mathcal{W}_T\right)$ est presque sûrement une constante, et donc si $\mathcal{W}_T$ est presque sûrement une constante.

On peut donner une interprétation thermodynamique à l'inégalité $-\ln\left(\frac{Z_1}{Z_0}\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathcal{W}_T\right)$, *le membre de gauche pouvant être interprété comme une différence d'énergie libre entre les états* $\lambda = 1$ *et* $\lambda = 0$ *et* $\mathbb{E}\left(\mathcal{W}_T\right)$ *comme le travail nécessaire pour passer de* $\lambda = 0$ *à* $\lambda = 1$. *L'inégalité peut alors être vue comme le second principe de la thermodynamique.*

6.1 On a

$$\begin{aligned}
dQ_t &= dX_t - v\,dt \\
&= -(X_t - Lt/T)\,dt + \sqrt{2}dW_t - v\,dt \\
&= -\left(Q_t + v\right)\,dt + \sqrt{2}dW_t.
\end{aligned}$$

En notant que $d(\exp(t)Q_t) = \exp(t)\left(-v\,dt + \sqrt{2}dW_t\right)$, on voit que l'équation sur Q_t s'intègre en :

$$\begin{aligned}
Q_t &= Q_0 \exp(-t) - v\int_0^t \exp(-(t-s))\,ds + \sqrt{2}\int_0^t \exp(-(t-s))\,dW_s \\
&= Q_0 \exp(-t) - v\left(1 - \exp(-t)\right) + \sqrt{2}\int_0^t \exp(-(t-s))\,dW_s \\
&= (Q_0 + v)\exp(-t) - v + \sqrt{2}\int_0^t \exp(-(t-s))\,dW_s.
\end{aligned}$$

6.2 Puisque $s \mapsto \exp(-s)$ est continue et à variation finie, on a

$$d\left(\exp(-s)\int_0^s \exp(r)\,dW_r\right) = -\left(\exp(-s)\int_0^s \exp(r)\,dW_r\right)\,ds + dW_s$$

et donc, par intégration en $s \in (0,t)$,

$$\exp(-t)\int_0^t \exp(r)\,dW_r = -\int_0^t \exp(-s)\int_0^s \exp(r)\,dW_r\,ds + W_t.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_t &= -v\int_0^t Q_s\,ds \\
&= -v(Q_0 + v)\left(1 - \exp(-t)\right) + v^2 t - \sqrt{2}v\int_0^t\int_0^s \exp(-(s-r))\,dW_r\,ds \\
&= -v(Q_0 + v)\left(1 - \exp(-t)\right) + v^2 t - \sqrt{2}vW_t + \sqrt{2}v\int_0^t \exp(-(t-r))dW_r.
\end{aligned}$$

Noté que Q_0, W_t et $\int_0^t \exp(-(t-r))dW_r$ sont trois gaussiennes, de moyenne nulle et de variance respective 1, t et $\int_0^t \exp(-2(t-r))\,dr = \frac{1}{2}(1-\exp(-2t))$. Q_0 est indépendante de W_t et $\int_0^t \exp(-(t-r))dW_r$, et, par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(W_t \int_0^t \exp(-(t-r))dW_r\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^t dW_r \int_0^t \exp(-(t-r))dW_r\right) \\
&= \int_0^t \exp(-(t-r))dr \\
&= 1-\exp(-t).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{W}_t$ est une gaussienne centrée en

$$\mathbb{E}(\mathcal{W}_t) = -v^2\left(1-\exp(-t)\right) + v^2 t =: m(t)$$

et de variance

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathcal{W}_t) &= \mathbb{E}\left(\mathcal{W}_t - \mathbb{E}(\mathcal{W}_t)\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(-vQ_0\left(1-\exp(-t)\right) - \sqrt{2}vW_t + \sqrt{2}v\int_0^t \exp(-(t-r))dW_r\right)^2 \\
&= v^2\left(1-\exp(-t)\right)^2 + 2v^2 t + v^2(1-\exp(-2t)) - 4v^2(1-\exp(-t)) \\
&= 2v^2\left(-1+\exp(-t)+t\right) =: \sigma^2(t).
\end{aligned}$$

6.3 Dans ce cas particulier, $Z_1 = Z_0 = \sqrt{2\pi}$. Et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(-\mathcal{W}_t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}}\int \exp(-w)\exp\left(-\frac{(w-m(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right)dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}}\int \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(t)}\left((w-m(t))^2 + 2\sigma^2(t)w\right)\right)dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}}\int \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(t)}\left(w^2 - 2(m(t)-\sigma^2(t))w + m(t)^2\right)\right)dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}}\int \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(t)}\left((w-(m(t)-\sigma^2(t)))^2 - (m(t)-\sigma^2(t))^2 + m(t)^2\right)\right)dw \\
&= \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2(t)}\left((m(t)-\sigma^2(t))^2 - m(t)^2\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2(t)}\left(-2m(t)\sigma^2(t) + \sigma^4(t)\right)\right) \\
&= \exp\left(-m(t) + \frac{\sigma^2(t)}{2}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de la question 4. Par ailleurs,

$$\mathbb{E}(\mathcal{W}_T) + \ln(Z_1/Z_0) = m(T) = -v^2\left(1-\exp(-T)\right) + v^2 T,$$

qui est bien positif, en accord avec la question 5. Finalement, par un calcul similaire au précédent,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\exp(-\mathcal{W}_T)) &= \mathbb{E}(\exp(-2\mathcal{W}_T)) - (\mathbb{E}(\exp(-\mathcal{W}_T)))^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T)}} \int \exp(-2w) \exp\left(-\frac{(w-m(T))^2}{2\sigma^2(T)}\right) dw - 1 \\
&= \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2(T)} \left((m(T) - 2\sigma^2(T))^2 - m(T)^2\right)\right) - 1 \\
&= \exp\left(-2m(T) + 2\sigma(T)^2\right) - 1 \\
&= \exp\left(2m(T)\right) - 1.
\end{aligned}$$

6.4 D'après la question précédente, on a

$$\mathrm{Var}(\exp(-\mathcal{W}_T)) = \exp\left(2\frac{L^2}{T^2}\left(-1 + \exp(-T) + T\right)\right) - 1.$$

Dans la limite $T \to 0$ (le changement est infiniment rapide), on a un estimateur de variance finie :

$$\lim_{T\to 0} \mathrm{Var}(\exp(-\mathcal{W}_T)) = \exp(L^2) - 1.$$

Cela correspond essentiellement à approximer Z_1/Z_0 par $\mathbb{E}\left(\exp\left(-(V(1,Q_0) - V(0,Q_0))\right)\right)$. Dans la limite $T \to \infty$, la variance tend vers 0 : le changement est infiniment lent, et l'estimateur devient parfait. En pratique, il faut donc trouver un compromis.