Récurrence et transience du mouvement Brownien : corrigé

1. (a) Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_G < \infty) = \mathbb{P}(\forall t > 0, W_t \in G) \leq \mathbb{P}(\forall t > 0, |W_t| \leq M) &\leq \mathbb{P}(|W_t| \leq M)\\ &= \mathbb{P}(|N| \leq M/\sqrt{t})\\ &\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(|N| = 0) = 0,\end{aligned}$$

où M est tel que $G \subset B(0, M)$ et $N \sim \mathcal{N}(0, I_d)$.

(b) On applique la formule d'Itō à $\varphi(W_t)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi(W_t) &= \sum_i \partial_i\varphi(W_t)\mathrm{d}W_t^i + \sum_{i,j}\partial_i\partial_j\varphi(W_t)\mathrm{d}\left\langle W^i, W^j\right\rangle_t\\ &= \sum_i \partial_i\varphi(W_t)\mathrm{d}W_t^i + \Delta\varphi(W_t)\mathrm{d}t\\ &= \sum_i \partial_i\varphi(W_t)\mathrm{d}W_t^i,\end{aligned}$$

car φ est supposée harmonique. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\varphi(W_{T_G\wedge n}) &= \varphi(x) + \sum_i \mathbb{E}\int_0^{T_G\wedge n}\partial_i\varphi(W_t)\mathrm{d}W_t^i\\ &= \varphi(x) + \sum_i \mathbb{E}\int_0^n \mathbf{1}_{T_G\geq t}\varphi(W_t)\mathrm{d}W_t^i\\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

Puisque T_G est presque sûrement fini, on a presque sûrement $T_G \wedge n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T_G$, et on conclut par convergence dominée (la fonction φ est continue sur $\bar{G}$ donc bornée).

(c) Si le problème de Dirichlet admet une solution classique φ, alors en applicant le résultat de la question précécente, on trouve : $\varphi(x) = \mathbb{E}_x\varphi(W_{T_G}) = \mathbb{E}_x f(W_{T_G})$ (car $W_{T_G} \in \partial G$ et $f = \varphi$ sur ∂G).

2. La fonction $p : x \mapsto \frac{b-x}{b-a}$ est harmonique sur $]a, b[$ et satisfait $p(a) = 1$, $p(b) = 0$. On a donc

$$p(x) = \mathbb{E}_x p(W_{T_{]a,b[}}) = \mathbb{P}(W_{T_{]a,b[}} = a) \times 1 + \mathbb{P}(W_{T_{]a,b[}} = b) \times 0 = \mathbb{P}(W_{T_{]a,b[}} = a).$$

L'autre égalité s'obtient en considérant $p(x) = \frac{x-a}{b-a}$.
On note T_a (resp. T_b) le premier temps d'atteinte de a (resp. b). Comme $T_{]a,b[} = T_a \wedge T_b$ est presque sûrement fini, on a $\{T_a < T_b\} \subset \{T_a < \infty\}$ et on a donc $\mathbb{P}(T_a < \infty) \geq \mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b-x}{b-a} \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

3. On a $\partial_i\left[f(\|x\|^2)\right] = 2x_i f'(\|x\|^2)$ et $\partial_i^2\left[f(\|x\|^2)\right] = 2f'(\|x\|^2) + 4x_i^2 f''(\|x\|^2)$. En posant $y = \|x\|^2$, on voit que la fonction $f(\|x\|^2)$ est donc harmonique si

$$df'(y) + 2yf''(y) = 0$$

pour tout $y \in]r, R[$. En résolvant cette équation, on trouve bien les fonctions données.

4. (a) La fonction $p : x \mapsto \frac{\log R - \log\|x\|}{\log R - \log r}$ est harmonique sur la couronne $G_{R,r}$ et vaut 1 sur la sphère de rayon r et 0 sur la sphère de rayon R. On a donc (par la question 1.(b))

$$p(x) = \mathbb{E}_x p(W_{T_{G_{R,r}}}) = \mathbb{P}_x(\|W_{T_{G_{R,r}}}\| = r).$$

On a $\lim_{R\to\infty} S_R = \infty$, par conséquent,

$$\mathbb{P}_x(S_0 < \infty) \leq \mathbb{P}_x\left(\bigcup_{R\to\infty}\{S_0 < S_R\}\right) = \lim_{R\to\infty}\mathbb{P}(S_0 < S_R)$$

(la dernière égalité vient du fait qu'on a l'union d'une famille croissante d'ensembles). Or

$$\mathbb{P}(S_0 < S_R) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{r\to 0}\{S_r < S_R\}\right) = \lim_{r\to 0}\mathbb{P}(S_r < S_R) = \lim_{r\to 0}\mathbb{P}_x(\|W_{T_{G_{R,r}}}\| = r) = 0$$

(la famille $\{S_r < S_R\}$ décroît quand r décroît). On a donc $\mathbb{P}(S_0 < \infty) = 0$.

(b) On a

$$\mathbb{P}(S_r < \infty) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{R\to\infty} \{S_r < S_R\}\right) = \lim_{R\to\infty} \mathbb{P}(S_r < S_R) = \lim_{R\to\infty} \frac{\log R - \log \|x\|}{\log R - \log r} = 1.$$

(c) Même raisonement que la question précédente, mais on a ici

$$\lim_{R\to\infty} \mathbb{P}(S_r < S_R) = \lim_{R\to\infty} \frac{R^{2-d} - \|x\|^{2-d}}{R^{2-d} - r^{2-d}} = \left(\frac{r}{\|x\|}\right)^{d-2}.$$