# Cours de Méthodes Déterministes en Finance (ENPC)

Benoît Humez

Société Générale – Recherche Quantitative

benoit.humez@sgcib.com

SOCIETE GENERALE
Corporate & Investment Banking

# Points abordés

- Méthodes numériques employées en finance
- Approximations de prix de vanilles européennes en Black Scholes dans le cas de dividendes discrets en montant
- Explication de PL en gestion Black-Scholes
- Modèle d'Avellaneda
- Exécution optimale

# Méthodes numériques en finance

# Un lien classique entre méthodes probabilistes et méthodes déterministes

- Vision probabiliste: calcul d'espérance
  - **Méthodes de Monte Carlo**
  - **Techniques de réduction de variance**
  - **Schémas de simulation**
  - **Arbres**
  - **Quasi Monte Carlo**
  - **Quantification**

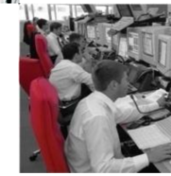
$$
\begin{aligned}
f(x,t) &= E_t\left[\begin{array}{c}\phi(X_T)\exp\left(-\int_t^T c(X_u)\,du\right)\\ +\int_t^T h(X_u,u)\exp\left(-\int_t^u c(X_s)\,ds\right)du\end{array}\right]\\
dX_t &= b(X_t)\,dt + a(X_t)\,dW_t
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}a^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial f}{\partial x}-c(x)f+h(x,t) &= 0\\
f(x,t=T) &= \phi(x)
\end{aligned}
$$

- Vision d'analyse numérique: résolution d' Équations aux Dérivées Partielles
  - **Différences Finies**
  - **Éléments Finis**
  - **Transformées de Fourier**
  - **Géométrie différentielle**
  - **Techniques de perturbation**

- Lien: Formule(s) de Feynman-Kac



# A propos des méthodes déterministes que l’on va utiliser

## Différences Finies : avantages

- Options américaines
- Rapide si une seule variable
- « Grecques » gratuites (EDP « Backward »)
- Facilement manipulable

## Différences Finies : inconvénients

- Restrictions sur le nombre de variables
- Pas d’encadrement de l’erreur
- Domaine simple pour le maillage
- Parallélisable ?

## Formules fermées et Approximations

- Rapidité
- Peu flexible
- Approximations: pas d’encadrement de l’erreur

## Contrôle optimal

- Très séduisant
- Résolution difficile

# Exemples d’approximations: vanilles avec dividendes discrets en montant, dans le modèle de Black-Scholes

# Dividendes en montant: le problème 1/2

- **Black Scholes avec dividendes**

$$dS_t = (r-q)\,S_t dt + \sigma S_t dW - \sum_i D_i(S)\,\delta(t-t_i)$$

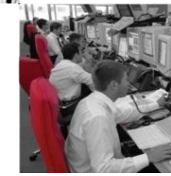
- **Illustration du mécanisme avec 1 seul dividende**

$$\begin{aligned}
S_{1-} &= S_0 \exp\left(\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t_1 + \sigma W_1\right) \\
S_{1+} &= S_0 \exp\left(\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t_1 + \sigma W_1\right) - D_1(S_{1-}) \\
S_T &= S_0 \exp\left(\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right) \\
&\quad -D_1(S_{1-}) \exp\left(\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t_1) + \sigma(W_T - W_1)\right)
\end{aligned}$$

- **Cas des dividendes proportionnels => no problem !**

$$\begin{aligned}
D_i(S) &= \beta_i * S \\
S_T &= S_0 \exp\left(\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right)\prod_{t_i<T}(1-\beta_i) \\
Call\left(K,\overrightarrow{\beta}\right) &= \prod_{t_i<T}(1-\beta_i)\,Call_{BS}\left(\frac{K}{\prod_{t_i<T}(1-\beta_i)}\right)
\end{aligned}$$

# Dividendes en montant: le problème 2/2



- **Cas des dividendes en montant**

$$
\begin{aligned}
D_i(S) &= \alpha_i \\
S_T &= S_0 \exp\left(\left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right) \\
&\quad - \sum_{t_i < T} \alpha_i \exp\left(\left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t_i) + \sigma\left(W_T - W_i\right)\right)
\end{aligned}
$$

  - même en Black Scholes, plus de formule fermée

- **Solutions possibles**
  - Intégrations numériques si peu de dividendes (pas le cas sur les indices)
  - Différences finies : obligation de s'arrêter à chaque date de dividende pour modifier la grille avec la condition $Prix\left(t_i^-, S\right) = Prix\left(t_i^+, S - D_i(S)\right)$
  - Approximations

# Dividendes montant: 1ère Approx

- **Idée: on sait faire avec**
  - un dividende initial
  - un dividende final
  - Black Scholes

$$S_T = (S_0 - \alpha_0)\exp\left(\left(r - q - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \tilde{\sigma}W_T\right) - \alpha_T$$

- **En effet, il suffit de**
  - Décaler le spot initial
  - Décaler le strike

$$\begin{aligned} Call &= e^{-rT}E\left[(S_T - K)^+\right] \\ &= Call_{BS}\left(S' = S_0 - \alpha_0, K' = K + \alpha_T, \sigma = \tilde{\sigma}\right) \end{aligned}$$

- **Méthode de « Black 3 moments »: 3 degrés de liberté $\alpha_0, \alpha_T, \tilde{\sigma}$ à utiliser pour retrouver les 3 premiers moments, connus analytiquement**

$$\alpha_0, \alpha_T, \tilde{\sigma} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} M_1 &= E\left[S_T\right] \\ M_2 &= E\left[S_T^2\right] \\ M_3 &= E\left[S_T^3\right] \end{aligned}$$

# Dividendes en montant: 2ème Approx (1/5)


- **Idée: répartition des dividendes + vol locale**
  - Idée de Remco Bos, Alexander Gairat et Anna Shepeleva
    - Papier de « Risk Magazine» de Janvier 2003: Dealing with discrete dividends
  - S'appuie sur 2 autres processus et une répartition des dividendes (Paramètres $\theta_i$ )

$$
\begin{aligned}
D_i(S) &= \alpha_i \\
\mu &= r - q \\
\underline{D}_t^T &= \sum_{T>i>t} \theta_i \alpha_i \exp\left(-\mu\left(t_i - t\right)\right) \\
\overline{D}_t^T &= \sum_{t\geq i>0} \left(1-\theta_i\right) \alpha_i \exp\left(\mu\left(t - t_i\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{S}_t &= \widetilde{S}_t\left(\mu dt + \sigma dW_t\right) \\
\widehat{S}_t &= \widetilde{S}_t + \underline{D}_t^T - \overline{D}_t^T \\
\widehat{S}_0 &= S_0
\end{aligned}
$$


# Dividendes en montant: 2ème Approx (2/5)

- **EDS vérifiées**

$$
\begin{aligned}
d\widehat{S}_t &= \mu \widehat{S}_t dt + \widetilde{\sigma} \widehat{S}_t \left(1 - \frac{\underline{D}_t^T - \overline{D}_t^T}{\widehat{S}_t}\right) dW_t - \sum_i \alpha_i \delta\left(t - t_i\right) \\
dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW - \sum_i \alpha_i \delta\left(t - t_i\right)
\end{aligned}
$$

- **Choix de la volatilité pour que les deux processus correspondent**

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{S}_t &= \widetilde{S}_t \left(\mu dt + \widetilde{\sigma}\left(\widetilde{S}, t\right) dW_t\right) \\
\widetilde{\sigma}\left(\widetilde{S}, t\right) &= \sigma \left(1 + \frac{\underline{D}_t^T - \overline{D}_t^T}{\widetilde{S}}\right)
\end{aligned}
$$

# Dividendes en montant: 2ème Approx (3/5)

- **Au final**

$$
\begin{aligned}
S_t &= \widehat{S}_t \\
\overline{D}^T_{t=0} &= 0 \qquad\qquad \widetilde{S}_{t=0} = S_{t=0} - \underline{D}^T_{t=0} \\
\underline{D}^T_{t=T} &= 0 \qquad\qquad S_{t=T} = \widetilde{S}_{t=T} - \overline{D}^T_{t=T} \\
(S_T - K)^+ &= \left(\widetilde{S}_{t=T} - \left(K + \overline{D}^T_{t=T}\right)\right)^+
\end{aligned}
$$

$$
P(S, K, T) = \widetilde{P}_{Vol\ Locale}\left(S - \underline{D}^T_0, K + \overline{D}^T_T, T\right)
$$

- On a une « répartition » des dividendes

$$
\begin{aligned}
\overline{D}^T_{t=T} &= \sum_i (1 - \theta_i)\, \alpha_i \exp\left(\mu (T - t_i)\right) \\
\underline{D}^T_{t=0} &= \sum_i \theta_i \alpha_i \exp\left(-\mu t_i\right)
\end{aligned}
$$

- les dividendes disparaissent (processus purement diffusif)
- … mais la vol locale apparaît

# Dividendes en montant: 2ème Approx (4/5)

- **Technique de perturbation de la vol, $\sigma_P$ , $\sigma_Q$ quelconques ici**

$$
\begin{aligned}
rP &= \partial_t P + (r-q) S \partial_S P + \frac{1}{2}\sigma_P^2 S^2 \partial_{SS}^2 P \\
rQ &= \partial_t Q + (r-q) S \partial_S Q + \frac{1}{2}\sigma_Q^2 S^2 \partial_{SS}^2 Q \\
\Delta &= P - Q \qquad\qquad \Delta(t=T,S)=0 \\
r_t\Delta &= \partial_t \Delta + (r-q) S \partial_S \Delta + \frac{1}{2} S^2 \left(\sigma_P^2 \partial_{SS}^2 P - \sigma_Q^2 \partial_{SS}^2 Q\right) \\
r_t\Delta &= \partial_t \Delta + (r-q) S \partial_S \Delta + \frac{1}{2}\sigma_Q^2 S^2 \partial_{SS}^2 \Delta + \frac{1}{2} S^2 \left(\sigma_P^2 - \sigma_Q^2\right) \partial_{SS}^2 P
\end{aligned}
$$

- Feynman-Kac

$$
\begin{aligned}
\Delta &= E_t^{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Q}}}\left[\int_t^T \frac{1}{2} S_u^2 \left(\sigma_P^2 - \sigma_Q^2\right) \partial_{SS}^2 P\left(S_u, u, \boldsymbol{\sigma}_P\right) \exp\left(-\int_t^u r_s ds\right) du\right] \\
dS_u &= S_u\left((r-q)\, du + \boldsymbol{\sigma}_Q dW_u\right) \\
\Delta &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_t^T \rho\left(S,u,\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Q}}\right) S^2 \left(\sigma_P^2 - \sigma_Q^2\right) \partial_{SS}^2 P\left(S_u, u, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{P}}\right) \exp\left(-\int_t^u r_s ds\right) du dS
\end{aligned}
$$

- Approximation

$$
\Delta \sim \int_0^\infty \int_t^T \rho\left(S,u,\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Q}}\right) S^2 \sigma_Q \left(\sigma_P - \sigma_Q\right) \partial_{SS}^2 P\left(S_u, u, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Q}}\right) \exp\left(-\int_t^u r_s ds\right) du dS
$$

# Dividendes en montant: 2ème Approx (5/5)

- **Retour au problème et résultat des calculs**

$$\sigma_P = \tilde{\sigma}(S,t) \quad , \quad \sigma_Q = \sigma$$

$$\Delta \sim e^{-qT}\left(\sum_{T>i>0} \alpha_i \exp(-\mu t_i)\left(\theta_i M(0,x_K) - M(t_i,x_K)\right)\right)$$

$$x_K = \ln\left(\frac{K+\overline{D}_T^T}{S-\underline{D}_0^T}\right) - (r-q)T$$

$$M(t,x_K) = N\left(\frac{\sigma_0^2 T + 2x_K}{2\sqrt{\sigma_0^2 T}}\right) - N\left(\frac{2\sigma_0^2 t - \sigma_0^2 T + 2x_K}{2\sqrt{\sigma_0^2 T}}\right)$$

- **Choix des $\theta_i$**

$$\begin{aligned}
K &= E[S_T] = K_{ATMF} \qquad x_K = 0 \\
\theta_i &= \frac{M(t_i, x_K=0)}{M(0, x_K=0)} \\
\Delta &= 0 + ordre \geq 2 \\
P(S, K_{ATMF}, T) &= P_{BS}\left(S - \underline{D}_0^T, K_{ATMF} + \overline{D}_T^T, T\right) + 0 + ordre \geq 2
\end{aligned}$$

- **En pratique**

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \frac{M(t_i, x_K=0)}{M(0, x_K=0)} \sim \frac{T-t_i}{T} \\
P(S, K_{ATMF}, T) &\sim P_{BS}\left(S - \underline{D}_0^T, K_{ATMF} + \overline{D}_T^T, T\right)
\end{aligned}$$

# Explication de PL d’une option delta hedgée en modèle de Black Scholes


# Explication de PL

- **Un peu de comptabilité, PL journalier d'un trader qui a vendu une option**

$$\begin{aligned} P\&L &= -\left(P\left(t+dt,S+dS\right)-P\left(t,S\right)\right) && \text{variation de l'option} \\ &+\Delta dS && \text{couverture en sousjacent} \\ &-\Delta S r dt + P r dt && \text{placement des liquidités/emprunt} \\ &+\Delta S q dt && \text{dividendes} \end{aligned}$$

- **Au 2ème ordre**

$$-\left(P\left(t+dt,S+dS\right)-P\left(t,S\right)\right)=-\left(\partial_t P dt+\partial_S P dS+\frac{1}{2}\partial^2_{SS}P\left(dS\right)^2\right)+ordre>2$$

- **On injecte l'EDP vérifiée par le prix**

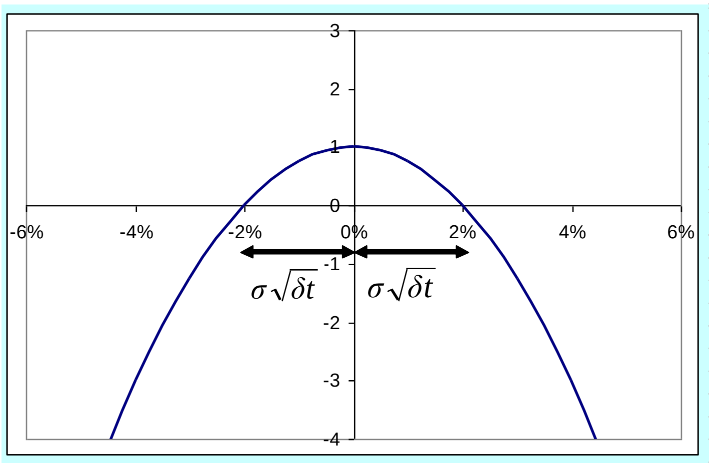
$$\begin{aligned} \partial_t P &= rP-(r-q)S\partial_S P-\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\partial^2_{SS}P \\ P\&L &= +\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\partial^2_{SS}P dt-\frac{1}{2}\partial^2_{SS}P\left(dS\right)^2+\left(\Delta-\partial_S P\right)dS-\left(\Delta-\partial_S P\right)S\left(r-q\right)dt \end{aligned}$$

  - On retrouve le choix du Delta

# Explication de PL

## Au final (Vente d'une option)

$$
\begin{aligned}
P\&L &= -\frac{1}{2}S^2\partial^2_{SS}P\left(\left(\frac{dS}{S}\right)^2-\sigma^2 dt\right)\\
\Gamma &= \partial^2_{SS}P \qquad \sigma_h^2=\frac{1}{dt}\left(\frac{dS}{S}\right)^2\\
P\&L &= -\frac{1}{2}S^2\Gamma\left(\sigma_h^2-\sigma^2\right)dt
\end{aligned}
$$




- Le signe du PL dépend des signes de
  - $\Gamma$ , connu
  - $\left(\frac{dS}{S}\right)^2-\sigma^2 dt$ , on dit que $\sigma$ est « la vol de break even »
- Typiquement si $\Gamma > 0$ on dit que :
  - On touche le « théta » $\frac{1}{2}S^2\Gamma\sigma^2 dt$
  - On perd le « gamma » $-\frac{1}{2}S^2\Gamma\left(\frac{dS}{S}\right)^2$

# Modèle d’Avellaneda

# Modèle d'Avellaneda: le problème

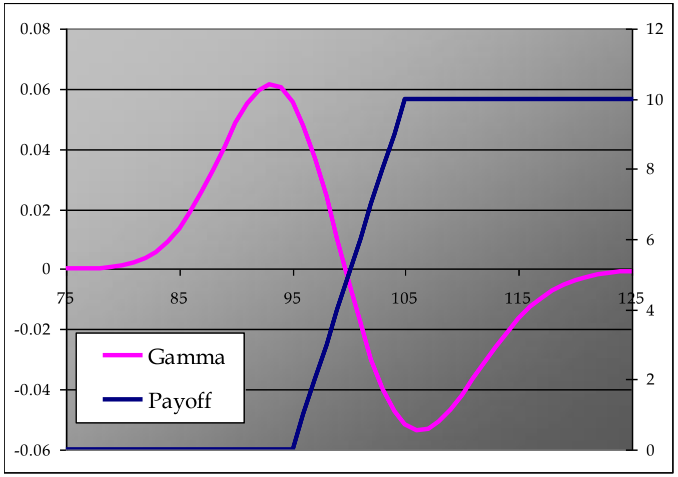
- **Cas où il est difficile de donner un prix et de gérer:**
  - il n 'y a pas de marché d'options vanilles (fonds)
  - le marché n'est pas liquide: obligé de porter l'option
  - les tailles sont très importantes (« Special Pricing »)

- **… on aimerait être plus à l'aise dans la gestion: on aimerait avoir une vol de break even confortable.**

# Modèle d'Avellaneda: être confortable en gestion

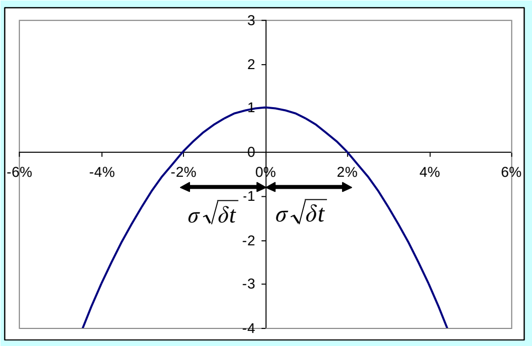
- **Si le gamma est de signe constant: facile ! On choisit une vol confortable et on gère en BS**

- **Mais il existe des options dont le gamma n'est pas de signe fixe**
  - Cas du call spread : combinaison d 'un achat de call strike K1 et d 'une vente de call Strike K2 > K1
  - Intérêt : moins cher qu'un call tout simple
  - Inconvénient : potentiel de gain borné
  - Le gamma change de signe en fonction du spot



# Modèle d'Avellaneda: être confortable en gestion

- **Ne serait-ce pas sympathique d'avoir une vol de break even**
  - Importante lorsque le produit est $\Gamma > 0$
  - faible lorsque le produit est $\Gamma < 0$




$$P\&L = -\frac{1}{2}S^2\Gamma\left(\left(\frac{dS}{S}\right)^2 - \sigma^2 dt\right)$$

- **C'est ce que fait le modèle d'Avellaneda:**
  - Le trader choisit 2 vols $\sigma_{\min}, \quad \sigma_{\max}$
  - Le modèle évalue le prix avec une vol locale choisie telle que

$$\sigma = \sigma_{\min} \qquad \text{pour des spots et temps où} \quad \Gamma < 0$$
$$\sigma = \sigma_{\max} \qquad \text{pour des spots et temps où} \quad \Gamma > 0$$

  - A priori pas évident car le gamma dépend de la vol et la vol dépend du gamma
  - Donne une gestion confortable, cette méthode répond au problème


# Modèle d'Avellaneda: propriétés

- Modèle à volatilité locale dépendant de l'option

- Si le signe du $\Gamma$ est constant on retrouve le prix Black Scholes avec la vol la plus conservative

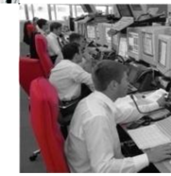
- Les prix ne sont pas additifs

$$P_{Ave}(Payoff_1 + Payoff_2) \quad \leq \quad P_{Ave}(Payoff_1) + P_{Ave}(Payoff_2)$$

- Le P&L est positif entre autre si la volatilité historique se réalise dans l'intervalle $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$

  =>gestion plus sereine

- Plusieurs sets de $(\sigma_{\min}, \sigma_{\max})$ peuvent donner le même prix.



# Méthode Avellaneda: résolution par différences finies

- **On résout l 'équation de manière backward**
  - On connaît le prix de l 'option en t+Dt
  - On cherche le prix en t
  - Le prix en t en fonction de celui en t+Dt est obtenu en discrétisant l 'EDP sur une grille de différences finies

$$-\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \qquad x = \ln(S) - (r-q)\,t \qquad Q = e^{-rt}P$$

$$\frac{Q_i^t - Q_i^{t+1}}{\delta_\tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\left[\theta\left(\frac{Q_{i-1}^{t+1} + Q_{i+1}^{t+1} - 2Q_i^{t+1}}{\delta_x^2} - \frac{Q_{i+1}^{t+1} - Q_{i-1}^{t+1}}{2\delta_x}\right) + (1-\theta)\left(\frac{Q_{i-1}^{t} + Q_{i+1}^{t} - 2Q_i^{t}}{\delta_x^2} - \frac{Q_{i+1}^{t} - Q_{i-1}^{t}}{2\delta_x}\right)\right]$$

- **Algorithme :**
  - Pour chaque point de la grille de prix, on estime le gamma de l 'option en t par la méthode des différence finies $\Gamma S^2 = e^{-rt}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \sim e^{-rt}\left(\frac{Q_{i-1}^{t+1} + Q_{i+1}^{t+1} - 2Q_i^{t+1}}{\delta_x^2} - \frac{Q_{i+1}^{t+1} - Q_{i-1}^{t+1}}{2\delta_x}\right)$
  - On en déduit la volatilité à prendre localement pour les poids de l 'EDP discrétisée en fonction du signe du gamma :

$$\sigma = \sigma_{\min} \quad \text{pour des spots où} \quad \Gamma < 0$$
$$\sigma = \sigma_{\max} \quad \text{pour des spots où} \quad \Gamma > 0$$

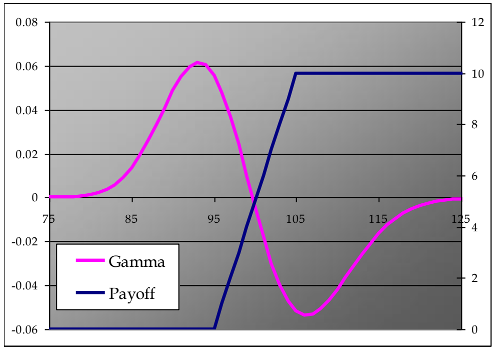
  - Une fois la vol déterminée, on résout classiquement le système linéaire issue de cette discrétisation
  - On résout ainsi une EDP non linéaire:

$$\mathrm{rP} = \frac{\partial P}{\partial t} + \left(r - q\right)S\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2}\left(1_{\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}>0}\,\sigma^2{}_{\max} + 1_{\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}<0}\,\sigma^2{}_{\min}\right)S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$$

# Modèle Avellaneda comme modèle de gestion

- Imaginons que l'on a un marché. Pour un call spread côté, on peut trouver un set $(\sigma_{\min}, \sigma_{\max})$ qui calibre le prix de marché et satisfait l'encadrement

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma_{\min} & < & \sigma(K_2) & < & \sigma(K_1) & < & \sigma_{\max} \\ 26 & < & 31 & < & 38 & < & 41 \end{array}$$




- La gestion Black Scholes: chaque option a sa vol

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} P\&L_{BS} &= -\frac{\Gamma_1^{BS} S^2}{2}\left(\sigma_h^2 - \sigma_1^2\right)\Delta t + \frac{\Gamma_2^{BS} S^2}{2}\left(\sigma_h^2 - \sigma_2^2\right)\Delta t \\ P\&L_{BS} &= -\frac{S^2}{2}\left(\Gamma_1^{BS} - \Gamma_2^{BS}\right)\sigma_h^2 \Delta t + \frac{S^2}{2}\left(\Gamma_1^{BS}\sigma_1^2 - \Gamma_2^{BS}\sigma_2^2\right)\Delta t \end{aligned}}$$

- La gestion Avellaneda $\boxed{P\&L_{Ave} \approx -\frac{\Gamma^{Ave} S^2}{2}\left(\sigma_h^2 - 1_{\Gamma^{Ave}>0}\,\sigma_{\max}^2 - 1_{\Gamma^{Ave}<0}\,\sigma_{\min}^2\right)\Delta t}$

- En pratique, selon le niveau de spot:

$$\text{Pour } \Gamma_1^{BS} \approx \Gamma_2^{BS} \text{ ie } S \text{ entre } K_1 \text{ et } K_2 : \quad P\&L_{Ave} \approx 0 \quad \text{et} \quad P\&L_{BS} \approx \frac{S^2}{2}\left(\Gamma_1^{BS}\sigma_1^2 - \Gamma_2^{BS}\sigma_2^2\right)\Delta t$$

$$\text{Pour } \Gamma_1^{BS} >> \Gamma_2^{BS} : \quad P\&L_{Ave} \approx -\frac{\Gamma^{Ave} S^2}{2}\left(\sigma_h^2 - \sigma_{\max}^2\right)\Delta t \quad \text{et} \quad P\&L_{BS} \approx -\frac{\Gamma_1^{BS} S^2}{2}\left(\sigma_h^2 - \sigma_1^2\right)\Delta t$$

$$\text{Pour } \Gamma_2^{BS} >> \Gamma_1^{BS} : \quad P\&L_{Ave} \approx \frac{\Gamma^{Ave} S^2}{2}\left(\sigma_h^2 - \sigma_{\min}^2\right)\Delta t \quad \text{et} \quad P\&L_{BS} \approx \frac{\Gamma_2^{BS} S^2}{2}\left(\sigma_h^2 - \sigma_2^2\right)\Delta t$$

  - **Prix égaux, gestions différentes, répartitions de PL différentes**
  - **Gestion plus confortable dans les zones à risques (où le Gamma est important)**
  - **Ne verse pas inutilement du « theta » dans les zones sans risque**

# Exécution optimale - Impact de marché


# Program trading

- **2 types d'ordres pour les clients**
  - "Agency": meilleure exécution possible, risque porté par les clients
  - "Principal": prix fixé initialement, si taille importante, la banque doit porter un risque

CARNET D'ORDRES

| Ordres | Qte. | Achat | Vente | Qte. | Ordres |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **20** | **29.305** | **29.330** | **94 043** | **1** |
| 1 | 20 | 29.275 | 29.335 | 2 200 | 1 |
| 1 | 100 | 29.255 | 29.340 | 369 | 1 |
| 1 | 20 | 29.245 | 29.345 | 12 771 | 2 |
| 1 | 20 171 | 29.240 | 29.350 | 6 003 | 2 |
| 2 | 19 094 | 29.220 | 29.355 | 691 | 1 |
| 1 | 20 000 | 29.200 | 29.360 | 532 | 1 |
| 1 | 20 | 29.190 | 29.365 | 20 | 1 |
| 1 | 472 | 29.180 | 29.380 | 533 | 1 |
| 1 | 8 973 | 29.170 | 29.390 | 21 130 | 2 |
| 11 | 68 890 | TOTAL | TOTAL | 138 292 | 13 |

- **Carnet d'ordres**
  - Marchés électroniques
  - Ordres à cours limite
  - Meilleure limite à l'achat: ''bid''
  - Meilleure limite à la vente: ''ask''

- **Modèle d'Anna Obizhaeva et Jiang Wang**

Référence:Obizhaeva, Anna A. and Wang, Jiang, Optimal Trading Strategy and Supply/Demand Dynamics (February 2005). AFA 2006 Boston Meetings Paper. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=686168 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.686168

# Modèle d'Anna Obizhaeva et Jiang Wang

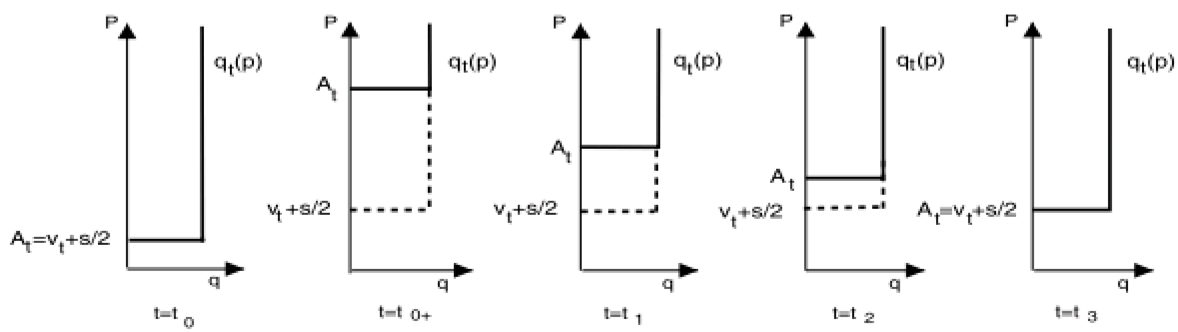
## Mécanique du carnet – 1 seul ordre

- Notations / définitions

$$
\begin{aligned}
A_t &: \text{"ask" (première limite à la vente)} \\
q(P) &: \text{volume disponible à la limite } P \\
F_t &: \text{valeur "fondamentale"} \\
V_t &: \text{valeur d'équilibre (impact permanent)} \\
s &: \text{écart Bid} - \text{Ask}
\end{aligned}
$$

- Lorsque l'on traite une quantité x:
  - On absorbe le volume disponible: l'ask saute
  - On perturbe l'état d'équilibre (impact de nos ordres sur F)
  - Le carnet se reconstitue progressivement
  - On sait calculer notre coût

$$
\begin{aligned}
x_t &= \int_{A_t}^{A_{t+}} q(P,t)\,dP \\
V_u(x_t) &= F_u + \lambda x_t \qquad u > t \\
A_u &= V_u(x_t) + \frac{s}{2} + \left(A_{t+}(x_t) - V_t(x_t) - \frac{s}{2}\right) e^{-\rho(u-t)} \\
Coût(t, x_t) &= \int_{A_t}^{A_{t+}} P q(P,t)\,dP
\end{aligned}
$$




# Modèle d'Anna Obizhaeva et Jiang Wang

- **Simplifications**
  - Volume constant
  - Valeur fondamentale suit un brownien

$$
\begin{aligned}
q(P) &= q 1_{\{P \geq A_t\}} \\
A_{t+}(x) &= \frac{x}{q} + A_t \\
Coût(t, x_t) &= c(x_t) = \left(\frac{x_t}{2q} + A_t\right) x_t \\
F_t &= F_0 + \sigma W_t
\end{aligned}
$$

- **Après n(t) transactions**

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{1}{q} - \lambda \\
V_t &= F_t + \lambda \sum_{i \leq n(t)} x_i \\
A_t &= V_t + s/2 + \sum_{i \leq n(t)} x_i k e^{-\rho(t-t_i)}
\end{aligned}
$$


# Problème d'exécution

- Le client nous achète une quantité X(0) que l'on doit déboucler d'ici la maturité T
- On se place en en temps discret : on traite x(i) en t(i) et X(i) est la quantité restant à déboucler

$$\begin{aligned} t_n &= n\tau \qquad \tau = T/N \\ X_t &= X_0 - \sum_{i<t} x_i \\ X_i - X_{i+1} &= x_i \\ X_{N+1} &= 0 \end{aligned}$$

- On accepte de porter un risque pour baisser nos coûts, on se donne une mesure du risque

$$\begin{aligned} P\&L &= \sum_{i=0}^{N} x_i \left(F_t - F_0\right) \\ P\&L &= \sum_{i=1}^{N} X_i \left(F_{i-1} - F_i\right) \end{aligned}$$

$$Risk = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_\tau^2$$

- Notre problème se pose comme une minimisation de coûts et de variance

$$min_{x \in \theta_D} \; E_0 \left[ \sum_{n=0}^{N} c\left(x_n\right) + \frac{1}{2} a * \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_\tau^2 \right]$$

# Problème d'exécution

## Problème de contrôle optimal

- Variables d'état: on peut se restreindre à X(n), D(n), F(n)

$$D_n = \sum_{i<n} x_i k e^{-\rho\tau(n-i)}$$

- Contrôle: x(n)

- Diffusion:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n - x_n \\ D_{n+1} &= (D_n + x_n k)\, e^{-\rho\tau} \\ F_{n+1} &= F_n + \sigma\,(W_{n+1} - W_n) \end{aligned}$$

- Fonction valeur:

$$J(i, X_i, D_i, F_i) = min_{x \in \theta_D}\ E_i \left[ \sum_{n=i}^{N} \left[ \left( \frac{x_n}{2q} + F_n + s/2 + \lambda\,(X_0 - X_n) + D_n \right) x_n + \frac{1}{2} a X_n^2 \sigma_\tau^2 \right] \right]$$

- Condition terminale:

$$\begin{aligned} X_{N+1} &= 0 \\ x_N &= X_N \\ J_N &= \left( \frac{X_N}{2q} + F_N + s/2 + \lambda\,(X_0 - X_N) + D_N \right) X_N + \frac{1}{2} a * X_N^2 \sigma_\tau^2 \end{aligned}$$


# Problème d'éxécution

## Résolution

- Principe de programmation dynamique

$$J\left(i, X_i, D_i, F_i\right) = min_{x \in \theta_D}\ E_i\left[\begin{array}{c}\left(\frac{x_i}{2q} + F_i + s/2 + \lambda\left(X_0 - X_i\right) + D_i\right) x_i + \frac{1}{2} a X_i^2 \sigma_\tau^2 \\ + J\left(i+1, X_{i+1}, D_{i+1}, F_{i+1}\right)\end{array}\right]$$

- J(N) est a une forme particulière, on postule

$$J\left(i, X_i, D_i, F_i\right) = \left(F_i + s/2\right) X_i + \lambda X_0 X_i + \alpha_i X_i^2 + \beta_i X_i D_i + \gamma_i D_i^2$$

- On trouve les relations de récurrence

# Illustration