Méthodes déterministes en finance :

TD : modèle de Black-Scholes

Parité Call Put

Soit $C(t,S)$ et $P(t,S)$ les prix d'un call et d'un put, pour une maturité T et un strike K fixés.

1. Quelle est l'équation vérifiée par $C-P$?
2. En déduire la parité call-put : $C(t,S)-P(t,S)=S-Ke^{-r(T-t)}$.

Cas de r et σ dépendants du temps

Montrer que le prix $P(t,S)$ d'une option européenne de payoff $\phi(S)$ dans le modèle de Black Scholes avec un taux d'intérêt r et une volatilité σ dépendant du temps et égal au prix de l'option de même maturité, avec un taux d'intérêt constant égal à $\overline{r}=\frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)\,ds$ et une volatilité constante égale à $\overline{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(s)\,ds}$.*On pourra utiliser une méthode probabiliste et une méthode déterministe, par des changements de variables successifs sur l'EDP de Black Scholes. Comparer les deux approches.*

Option Lookback

On considère une option sur maximum : le pay off est $h=\phi(S_T,M_T)$ où $M_t=\max_{0\le r\le t}S_r$, et S_t vérifie l'EDS $dS_t=S_t(r\,dt+\sigma dW_t)$ sous la probabilité risque neutre. Les paramètres r et σ sont supposés constants.

1. Vérifier que (S_t,M_t) est un processus de Markov. Donner le prix de l'option sous la forme d'une espérance conditionnelle.
2. Le prix de l'option est donc de la forme $P(t,S_t,M_t)$. En remarquant que M_t est un processus à variation finie et que la mesure dM_t est étrangère à la mesure de Lebesgue dt, en déduire l'EDP vérifiée par P :

$$\begin{cases} \partial_t P+\frac{\sigma^2}{2}S^2\partial_{S,S}P+rS\partial_S P-rP=0, \qquad \text{pour } 0\le S\le M,\\ P(T,S,M)=\phi(S,M),\\ \dfrac{\partial P}{\partial M}(t,S,S)=0. \end{cases} \tag{1}$$

3. Vérifier réciproquement que si P est solution de (1), alors le prix de l'option est bien $P(t,S_t,M_t)$, en ajoutant des conditions de régularité adéquates sur P, r et σ.
4. On suppose dans cette question que le payoff est de la forme : $\phi(S,M)=M\tilde{\phi}(S/M)$. Montrer que P est alors de la forme $P(t,S,M)=MW(t,S/M)$ où W vérifie :

$$\begin{cases} \partial_t W+\frac{\sigma^2}{2}\xi^2\partial_{\xi,\xi}W+r\xi\partial_\xi W-rW=0, \qquad \text{pour } 0\le \xi\le 1,\\ W(T,\xi)=\tilde{\phi}(\xi),\\ \dfrac{\partial W}{\partial \xi}(t,1)=W(t,1). \end{cases} \tag{2}$$