

Méthodes déterministes en finance

TP du 3 octobre 2011

Calcul de la volatilité implicite par une méthode de Newton

On rappelle la formule de Black Scholes pour un call :

$$P(t, S, K, T, r, \sigma) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

où N est la fonction de répartition de la gaussienne :

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy,$$

et d_1 et d_2 valent respectivement :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} (\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

On s'intéresse au problème suivant : étant donné le prix d'un call de paramètre (K, T) observé sur le marché à l'instant t , et connaissant le taux d'intérêt r et la valeur du sous-jacent S au même instant, est-il possible de calculer la volatilité σ du sous-jacent associé ?

Nous allons montrer que c'est effectivement possible. La volatilité obtenue s'appelle *la volatilité implicite*.

1. On commence par adimensionner le problème. On introduit les grandeurs sans dimensions¹ : $\mu = \ln(S \exp(r(T-t))/K)$, $\rho = \sigma\sqrt{T-t}$ et $f = P/S$. Vérifier que :

$$P(t, S, K, T, r, \sigma) = Sf(\mu, \rho)$$

où

$$f(\mu, \rho) = N(d_+) - e^{-\mu}N(d_-)$$

avec

$$d_{\pm} = \frac{\mu}{\rho} \pm \frac{\rho}{2}.$$

Réécrire le problème en terme de f .

2. Montrer que ce problème admet une unique solution, sous une condition sur le prix du call observé à préciser. Justifier le fait que les prix observés vérifient nécessairement cette condition. *On expliquera avec des arguments financiers pourquoi f est une fonction croissante de ρ , ce qui sera vérifié à la question suivante. On pourra ensuite vérifier que $\lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\mu, \rho) = 1$ et que $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\mu, \rho) = (1 - e^{-\mu})_+$. Pour justifier que les prix observés sont bien entre les deux limites, on pourra utiliser la parité call-put : Prix du call - Prix du put = $S - Ke^{-r(T-t)}$ ou alors utiliser un raisonnement d'arbitrage.*

¹Vérifier qu'elles sont bien sans dimensions.

3. On cherche à mettre en oeuvre une méthode de Newton pour résoudre le problème : étant donnés μ et f_{obs} , trouver ρ tel que $f(\mu, \rho) = f_{\text{obs}}$. Écrire l'algorithme de Newton. Vous devez trouver $\frac{\partial f}{\partial \rho}(\mu, \rho) = N'(d_+)$ où $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ est la densité de probabilité de la gaussienne.
4. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\mu, \rho) = N'(d_+) \frac{4\mu^2 - \rho^4}{4\rho^3}$. Pourquoi $\rho_0 = \sqrt{2|\mu|}$ est un bon point de départ pour les itérations de Newton. Pourquoi l'algorithme de Newton converge-t'il nécessairement avec ce point de départ? Faire un dessin de la fonction $\rho \mapsto f(\mu, \rho)$, et se convaincre que la suite des ρ_n est bornée et monotone.
5. Programmer cette méthode sous Scilab. Comparer la vitesse de convergence de l'algorithme de Newton avec celle d'un algorithme de point fixe plus simple, où on approxime $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ par la constante 1. Quel autre algorithme pourrait-on utiliser?
6. On se donne les valeurs suivantes : $r = 0.05$, $T = 0.04$, $t = 0$, $S = 2872$ et des prix de calls associés à différents prix d'exercice, donnés dans le tableau 1.

K	2650	2700	2750	2800	2850	2900	2950	3000
P_{obs}	233	183	135	89	50	24	9	3

TAB. 1 – Valeurs d'un call, pour différentes valeurs du prix d'exercice, sur l'index FT-SE, 4 Février 1993, Page 7 de Willmott, Dewynne, Howison, Option pricing : mathematical models and computation, Oxford financial press, 1993.

Tracer la volatilité implicite en fonction de la valeur du prix d'exercice pour chacun de ces calls (cf. Figure 1). Commenter.

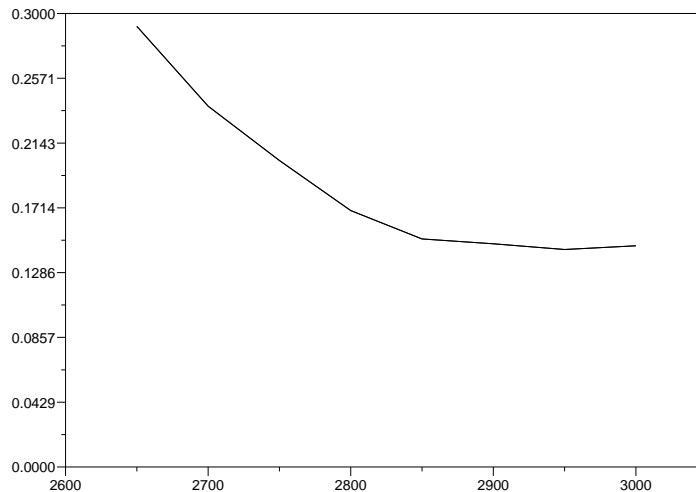


FIG. 1 – Volatilité en fonction de la valeur du prix d'exercice.