# Méthodes déterministes en finance

TP : modèle de Black-Scholes

### Calcul de la volatilité implicite par une méthode de Newton

On rappelle la formule de Black Scholes pour un call :

$$P(t, S, K, T, r, \sigma) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

où $N$ est la fonction de répartition de la gaussienne :

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-y^2/2)\, dy,$$

et $d_1$ et $d_2$ valent respectivement :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)\right), \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

On s'intéresse au problème suivant : étant donné le prix d'un call de paramètre $(K, T)$ observé sur le marché à l'instant $t$, et connaissant le taux d'intérêt $r$ et la valeur du sous-jacent $S$ au même instant, est-il possible de calculer la volatilité $\sigma$ du sous-jacent associé ?

Nous allons montrer que c'est effectivement possible. La volatilité obtenue s'appelle *la volatilité implicite*.

1. On commence par adimensionner le problème. On introduit les grandeurs sans dimensions [1] : $\mu = \ln\left(S\exp(r(T-t))/K\right)$, $\rho = \sigma\sqrt{T-t}$ et $f = P/S$. Vérifier que :

   $$P(t, S, K, T, r, \sigma) = Sf(\mu, \rho)$$

   où

   $$f(\mu, \rho) = N(d_+) - e^{-\mu}N(d_-)$$

   avec

   $$d_\pm = \frac{\mu}{\rho} \pm \frac{\rho}{2}.$$

   Réécrire le problème en terme de $f$.

2. Montrer que ce problème admet une unique solution, sous une condition sur le prix du call observé à préciser. Justifier le fait que les prix observés vérifient nécessairement cette condition. *On expliquera avec des arguments financiers pourquoi $f$ est une fonction croissante de $\rho$, ce qui sera vérifié à la question suivante. On pourra ensuite vérifier que $\lim_{\rho\to\infty} f(\mu, \rho) = 1$ et que $\lim_{\rho\to 0} f(\mu, \rho) = (1 - e^{-\mu})_+$. Pour justifier que les prix observés sont bien entre les deux limites, on pourra utiliser la parité call-put : Prix du call - Prix du put = $S - Ke^{-r(T-t)}$ ou alors utiliser un raisonnement d'arbitrage.*

---

1. Vérifier qu'elles sont bien sans dimensions.

3. On cherche à mettre en oeuvre une méthode de Newton pour résoudre le problème : étant donnés $\mu$ et $f_{\text{obs}}$, trouver $\rho$ tel que $f(\mu, \rho) = f_{\text{obs}}$. Ecrire l'algorithme de Newton. *Vous devez trouver* $\frac{\partial f}{\partial \rho}(\mu, \rho) = N'(d_+)$ *où* $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ *est la densité de probabilité de la gaussienne.*
4. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(\mu, \rho) = N'(d_+)\frac{4\mu^2-\rho^4}{4\rho^3}$. Pourquoi $\rho_0 = \sqrt{2|\mu|}$ est un bon point de départ pour les itérations de Newton. Pourquoi l'algorithme de Newton converge-t'il nécessairement avec ce point de départ ? *Faire un dessin de la fonction* $\rho \mapsto f(\mu, \rho)$, *et se convaincre que la suite des* $\rho_n$ *est bornée et monotone.*
5. Programmer cette méthode sous Scilab. Comparer la vitesse de convergence de l'algorithme de Newton avec celle d'un algorithme de point fixe plus simple, où on approxime $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ par la constante 1. Quel autre algorithme pourrait-on utiliser ?
6. On se donne les valeurs suivantes : $r = 0.05$, $T = 0.04$, $t = 0$, $S = 2872$ et des prix de calls associés à différents prix d'exercice, donnés dans le tableau 1.

| $K$ | 2650 | 2700 | 2750 | 2800 | 2850 | 2900 | 2950 | 3000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_{\text{obs}}$ | 233 | 183 | 135 | 89 | 50 | 24 | 9 | 3 |

Table 1 – Valeurs d'un call, pour différentes valeurs du prix d'exercice, sur l'index FT-SE, 4 Février 1993, Page 7 de Willmott, Dewynne, Howison, Option pricing : mathematical models and computation, Oxford financial press, 1993.

Tracer la volatilité implicite en fonction de la valeur du prix d'exercice pour chacun de ces calls (cf. Figure 1). Commenter.

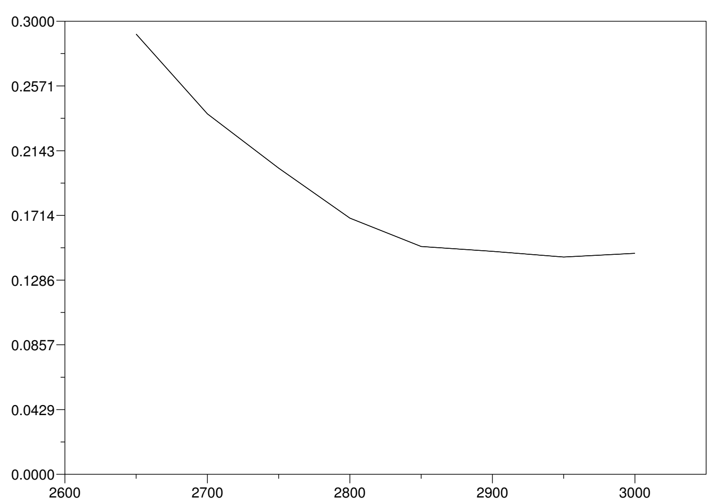


Figure 1 – Volatilité en fonction de la valeur du prix d'exercice.