Méthodes déterministes en finance :

TD : Analyse mathématique de l'EDP de Black-Scholes

L'espace V

On définit $V = \{v \in L^2(0,\infty), x\partial_x v \in L^2(0,\infty)\}$, où les dérivées sont au sens des distributions.

1. Montrer que si $v \in V$, alors xv est une fonction continue sur $[0,\infty)$.
2. En déduire que les fonctions dans V sont des fonctions continues sur $(0,\infty)$. Ces fonctions admettent-elles nécessairement une limite en 0 ?
3. Montrer que $v \mapsto \int (x\partial_x v)^2$ définit une norme sur V. *On pourra utiliser l'identité : pour v régulière et à support compact $\int v^2 = -2\int xv\partial_x v$.*
4. Que deviennent ces résultats en dimension plus grande : $V = \{v \in L^2((0,\infty)^n), x_i\partial_{x_i} v \in L^2((0,\infty)^n), 1 \leq i \leq n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Convexité

Soit P le prix d'une option de fonction de payoff ϕ convexe, dans le modèle de Black Scholes pour des coefficients $r(t)$ et $\sigma(t,S)$.

1. Montrer que, sous des hypothèses sur r, σ et ϕ à préciser, P est une fonction convexe de S en vérifiant que $\dfrac{\partial^2 P}{\partial S^2} \geq 0$. *On pourra calculer l'EDP vérifiée par $Q = \dfrac{\partial^2 P}{\partial S^2}$ et utiliser le principe du maximum en énonçant les hypothèses nécessaires à son application*[1].
2. En déduire que, sous les mêmes hypothèses, si la volatilité σ vérifie $0 < \underline{\sigma} \leq \sigma(t,S) \leq \overline{\sigma}$, alors $\underline{P}(t,S) \leq P(t,S) \leq \overline{P}(t,S)$ où $\underline{P}$ (resp. $\overline{P}$) désigne le prix de l'option de même payoff ϕ, avec $\sigma = \underline{\sigma}$ (resp. $\overline{\sigma}$).
3. En déduire la limite du prix d'un put quand $S \to \infty$ dans le modèle de Black Scholes, puis le comportement asymptotique du prix d'un call en utilisant la parité call-put.

On se propose de vérifier la convexité du prix du call en n'utilisant que des arguments d'arbitrage. On note $C(t,S;T,K)$ le prix d'un call de strike K et de maturité T.

1. Montrer par un argument d'arbitrage que C est une fonction convexe de K. *Pour $0 < K_1 < K_2$ et $\lambda \in (0,1)$, on pourra comparer les valeurs d'un portefeuille constitué de λ calls de strike K_1 et de $(1-\lambda)$ calls de strike K_2, et d'un portefeuille constitué d'un call de strike $\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2$.*
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $C(t,\alpha S;T,\alpha K) = \alpha C(t,S;T,K)$.
3. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ positivement homogène de degré un (*i.e.* telle que $f(\alpha x,\alpha y) = \alpha f(x,y)$), si f est convexe par rapport à x, alors f est convexe par rapport à y.
4. En déduire que C est une fonction convexe de S.

---

1. On peut généraliser ce résultat à des solutions P moins régulières, par exemple en régularisant le payoff et en passant à la limite. Rendre rigoureux l'argument pour un put de payoff $\phi(S) = (K-S)_+$.

Applications du principe du maximum

Soit $C_{K,T}(t,S)$ (resp. $P_{K,T}(t,S)$) une solution de l'EDP de Black et Scholes sur $(0,T)\times\mathbb{R}_+$, pour des coefficients positifs $r(t)$ et $\sigma(t,S)$, et une condition finale $C(T,S)=(S-K)_+$ (call) (resp. $P(T,S)=(K-S)_+$ (put)). On suppose que r et σ sont suffisemment réguliers pour que le principe du maximum s'applique. En déduire les propriétés suivantes :

1. La parité call-put : $C_{K,T}(t,S)-P_{K,T}(t,S)=S-Ke^{-\int_t^T r(s)\,ds}$,
2. $\left(S-Ke^{-\int_t^T r(s)\,ds}\right)_+ \leq C_{K,T}(t,S)\leq S$,
3. $\left(Ke^{-\int_t^T r(s)\,ds}-S\right)_+ \leq P_{K,T}(t,S)\leq Ke^{-\int_t^T r(s)\,ds}$,
4. Si $K_1\leq K_2$ alors $C_{K_1,T}(t,S)\geq C_{K_2,T}(t,S)$ et $P_{K_1,T}(t,S)\leq P_{K_2,T}(t,S)$,
5. Si $T_1\leq T_2$ alors $C_{K,T_1}(t,S)\leq C_{K,T_2}(t,S)$ (pour tout $t\leq T_1$),
6. En supposant que r et σ sont indépendants du temps, $t\mapsto C_{K,T}(t,S)$ est décroissante sur $[0,T]$,
7. $S\mapsto C_{K,T}(t,S)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $S\mapsto P_{K,T}(t,S)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. *On pourra écrire l'EDP vérifiée par $\partial_S C$ (resp. $\partial_S P$) et utiliser le principe de maximum.*

Vérifier que ces propriétés sont également vraies pour des calls et des puts quelque soit le modèle, en utilisant simplement des arguments d'arbitrage ou des arguments financiers.

Forward *vs* backward

On considère les deux équations, pour $T>0$ et $f\in L^2((0,T)\times(0,1))$:

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=f & (t,x)\in(0,T)\times(0,1)\\ u(t=0,x)=u_0(x) & x\in(0,1)\\ u(t,0)=u(t,1)=0 & t\in(0,T)\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}\partial_t u+\Delta u=f & (t,x)\in(0,T)\times(0,1)\\ u(t=0,x)=u_0(x) & x\in(0,1)\\ u(t,0)=u(t,1)=0 & t\in(0,T)\end{cases}\tag{2}$$

1. Calculer les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien de Dirichlet sur $(0,1)$. Rappeler pourquoi les fonctions propres constituent une base de $L^2(0,1)$. *On rappelle que les valeurs propres λ et fonctions propres $u_\lambda\neq 0$ du Laplacien de Dirichlet sur $(0,1)$ sont les couples (λ,u_λ) solutions de* $\begin{cases}-\Delta u_\lambda=\lambda u_\lambda\\ u_\lambda(0)=u_\lambda(1)=0\end{cases}$.
2. Donner une solution du problème (1) sous forme d'une série, en décomposant u sur la base construite à la question précédente.
3. En appliquant cette méthode à (2), qu'observe-t'on ? Commenter. L'EDP de Black-Scholes est-elle "du type" (1) ou (2) ?
4. Comparer avec l'équation des ondes $\partial_{t,t}u-\Delta u=f$.

Call et autres options

On se place dans le modèle de Black Scholes avec un taux d'intérêt $r(t)$ et une volatilité $\sigma(t,S)$. On note $C_{K,T}(t,S)$ le prix d'un call de strike K et de maturité T. On s'intéresse au prix $P(t,S)$ d'une option européenne de maturité T et de payoff $h=\phi(S_T)$ avec ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\phi(0)=\phi'(0)=0$, et ϕ'' est à support compact dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$P(t,S)=\int_0^\infty \phi''(K)C_{K,T}(t,S)\,dK.$$

Symétrie put-call

On note $C(t,S;T,K,r,d)$ (resp. $P(t,S;T,K,r,d)$) le prix d'un call (resp. d'un put) de strike K et de maturité T, avec un taux d'intérêt r et un dividende d indépendants du temps. La volatilité σ peut dépendre du temps et de la valeur du sous-jacent.

1. Utiliser les formules de Black-Scholes dans le cas d'une volatilité constante pour montrer la symétrie put-call :
$$C(t,S;T,K,r,d)=P(t,K;T,S,d,r) \tag{3}$$
2. Retrouver cette symétrie par un argument financier. *On pourra raisonner sur des conversions d'une monnaie en une autre.*
3. En déduire une EDP vérifiée par $(t,K)\mapsto C(t,S;T,K,r,d)$.

Comportement asymptotique du prix d'un put

On se place dans le modèle de Black Scholes avec un taux d'intérêt $r(t)$ et une volatilité $\sigma(t,S)$ suffisamment réguliers. On note $P(t,S)$ le prix d'un call de strike K et de maturité T. On se propose d'étudier le comportement de $P(t,S)$ quand S tend vers ∞, par deux méthodes.

1. Montrer que le prix du put décroît plus vite que $C_\alpha S^{-\alpha}$ en comparant le prix du put à $C_\alpha S^{-\alpha}$ par le principe du maximum, pour un couple (α, C_α) bien choisi.
2. En utilisant le fait que $0\le P(t,S)\le \overline{P}(t,S)$, où $\overline{P}$ est le prix du put pour une volatilité égale à $\overline{\sigma}=\max_{[0,T]\times\mathbb{R}_+}\sigma$, montrer que le prix du put tend vers zéro plus vite que S^{-N}, pour tout $N>0$.