

# Méthodes déterministes en finance :

TD du 10 octobre 2011

## L'espace $V$

On définit  $V = \{v \in L^2(0, \infty), x\partial_x v \in L^2(0, \infty)\}$ , où les dérivées sont au sens des distributions.

1. Montrer que si  $v \in V$ , alors  $xv$  est une fonction continue sur  $[0, \infty)$ .
2. En déduire que les fonctions dans  $V$  sont des fonctions continues sur  $(0, \infty)$ . Ces fonctions admettent-elles nécessairement une limite en 0 ?
3. Montrer que  $v \mapsto \int (x\partial_x v)^2$  définit une norme sur  $V$ . On pourra utiliser l'identité : pour  $v$  régulière et à support compact  $\int v^2 = -2 \int xv\partial_x v$ .
4. Que deviennent ces résultats en dimension plus grande :  $V = \{v \in L^2((0, \infty)^n), x_i \partial_{x_i} v \in L^2((0, \infty)^n), 1 \leq i \leq n\}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

## Convexité

Soit  $P$  le prix d'une option de fonction de payoff  $\phi$  convexe, dans le modèle de Black Scholes pour des coefficients  $r(t)$  et  $\sigma(t, S)$ .

1. Montrer que, sous des hypothèses sur  $r$ ,  $\sigma$  et  $\phi$  à préciser,  $P$  est une fonction convexe de  $S$  en vérifiant que  $\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \geq 0$ . On pourra calculer l'EDP vérifiée par  $Q = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$  et utiliser le principe du maximum en énonçant les hypothèses nécessaires à son application<sup>1</sup>.
2. En déduire que, sous les mêmes hypothèses, si la volatilité  $\sigma$  vérifie  $0 < \underline{\sigma} \leq \sigma(t, S) \leq \bar{\sigma}$ , alors  $\underline{P}(t, S) \leq P(t, S) \leq \bar{P}(t, S)$  où  $\underline{P}$  (resp.  $\bar{P}$ ) désigne le prix de l'option de même payoff  $\phi$ , avec  $\sigma = \underline{\sigma}$  (resp.  $\bar{\sigma}$ ).
3. En déduire la limite du prix d'un put quand  $S \rightarrow \infty$  dans le modèle de Black Scholes, puis le comportement asymptotique du prix d'un call en utilisant la parité call-put.

On se propose de vérifier la convexité du prix du call en n'utilisant que des arguments d'arbitrage. On note  $C(t, S; T, K)$  le prix d'un call de strike  $K$  et de maturité  $T$ .

1. Montrer par un argument d'arbitrage que  $C$  est une fonction convexe de  $K$ . Pour  $0 < K_1 < K_2$  et  $\lambda \in (0, 1)$ , on pourra comparer les valeurs d'un portefeuille constitué de  $\lambda$  calls de strike  $K_1$  et de  $(1 - \lambda)$  calls de strike  $K_2$ , et d'un portefeuille constitué d'un call de strike  $\lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2$ .
2. Montrer que pour tout  $\alpha > 0$ ,  $C(t, \alpha S; T, \alpha K) = \alpha C(t, S; T, K)$ .
3. Montrer que pour toute fonction  $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  positivement homogène de degré un (i.e. telle que  $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$ ), si  $f$  est convexe par rapport à  $x$ , alors  $f$  est convexe par rapport à  $y$ .
4. En déduire que  $C$  est une fonction convexe de  $S$ .

---

<sup>1</sup>On peut généraliser ce résultat à des solutions  $P$  moins régulières, par exemple en régularisant le payoff et en passant à la limite. Rendre rigoureux l'argument pour un put de payoff  $\phi(S) = (K - S)_+$ .

## Applications du principe du maximum

Soit  $C_{K,T}(t, S)$  (resp.  $P_{K,T}(t, S)$ ) une solution de l'EDP de Black et Scholes sur  $(0, T) \times \mathbb{R}_+$ , pour des coefficients positifs  $r(t)$  et  $\sigma(t, S)$ , et une condition finale  $C(T, S) = (S - K)_+$  (call) (resp.  $P(T, S) = (K - S)_+$  (put)). On suppose que  $r$  et  $\sigma$  sont suffisamment réguliers pour que le principe du maximum s'applique. En déduire les propriétés suivantes :

1. La parité call-put :  $C_{K,T}(t, S) - P_{K,T}(t, S) = S - Ke^{-\int_t^T r(s) ds}$ ,
2.  $\left( S - Ke^{-\int_t^T r(s) ds} \right)_+ \leq C_{K,T}(t, S) \leq S$ ,
3.  $\left( Ke^{-\int_t^T r(s) ds} - S \right)_+ \leq P_{K,T}(t, S) \leq Ke^{-\int_t^T r(s) ds}$ ,
4. Si  $K_1 \leq K_2$  alors  $C_{K_1,T}(t, S) \geq C_{K_2,T}(t, S)$  et  $P_{K_1,T}(t, S) \leq P_{K_2,T}(t, S)$ ,
5. Si  $T_1 \leq T_2$  alors  $C_{K,T_1}(t, S) \leq C_{K,T_2}(t, S)$  (pour tout  $t \leq T_1$ ),
6. En supposant que  $r$  et  $\sigma$  sont indépendants du temps,  $t \mapsto C_{K,T}(t, S)$  est décroissante sur  $[0, T]$ ,
7.  $S \mapsto C_{K,T}(t, S)$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et  $S \mapsto P_{K,T}(t, S)$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . On pourra écrire l'EDP vérifiée par  $\partial_S C$  (resp.  $\partial_S P$ ) et utiliser le principe de maximum.

Vérifier que ces propriétés sont également vraies pour des calls et des puts quelque soit le modèle, en utilisant simplement des arguments d'arbitrage ou des arguments financiers.

## Forward vs backward

On considère les deux équations, pour  $T > 0$  et  $f \in L^2((0, T) \times (0, 1))$  :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1) \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & x \in (0, 1) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t \in (0, T) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \partial_t u + \Delta u = f & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1) \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & x \in (0, 1) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t \in (0, T) \end{cases} \quad (2)$$

1. Calculer les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien de Dirichlet sur  $(0, 1)$ . Rappeler pourquoi les fonctions propres constituent une base de  $L^2(0, 1)$ . On rappelle que les valeurs propres  $\lambda$  et fonctions propres  $u_\lambda \neq 0$  du Laplacien de Dirichlet sur  $(0, 1)$  sont les couples  $(\lambda, u_\lambda)$  solutions de  $\begin{cases} -\Delta u_\lambda = \lambda u_\lambda \\ u_\lambda(0) = u_\lambda(1) = 0 \end{cases}$ .
2. Donner une solution du problème (1) sous forme d'une série, en décomposant  $u$  sur la base construite à la question précédente.
3. En appliquant cette méthode à (2), qu'observe-t'on ? Commenter. L'EDP de Black-Scholes est-elle "du type" (1) ou (2) ?
4. Comparer avec l'équation des ondes  $\partial_{t,t} u - \Delta u = f$ .

## Call et autres options

On se place dans le modèle de Black Scholes avec un taux d'intérêt  $r(t)$  et une volatilité  $\sigma(t, S)$ . On note  $C_{K,T}(t, S)$  le prix d'un call de strike  $K$  et de maturité  $T$ . On s'intéresse au prix  $P(t, S)$  d'une option européenne de maturité  $T$  et de payoff  $h = \phi(S_T)$  avec  $\phi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ , et  $\phi''$  est à support compact dans  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que

$$P(t, S) = \int_0^\infty \phi''(K) C_{K,T}(t, S) dK.$$

## Symétrie put-call

On note  $C(t, S; T, K, r, d)$  (resp.  $P(t, S; T, K, r, d)$ ) le prix d'un call (resp. d'un put) de strike  $K$  et de maturité  $T$ , avec un taux d'intérêt  $r$  et un dividende  $d$  indépendants du temps. La volatilité  $\sigma$  peut dépendre du temps et de la valeur du sous-jacent.

1. Utiliser les formules de Black-Scholes dans le cas d'une volatilité constante pour montrer la symétrie put-call :

$$C(t, S; T, K, r, d) = P(t, K; T, S, d, r) \quad (3)$$

2. Retrouver cette symétrie par un argument financier. *On pourra raisonner sur des conversions d'une monnaie en une autre.*
3. En déduire une EDP vérifiée par  $(t, K) \mapsto C(t, S; T, K, r, d)$ .

## Comportement asymptotique du prix d'un put

On se place dans le modèle de Black Scholes avec un taux d'intérêt  $r(t)$  et une volatilité  $\sigma(t, S)$  suffisamment réguliers. On note  $P(t, S)$  le prix d'un call de strike  $K$  et de maturité  $T$ . On se propose d'étudier le comportement de  $P(t, S)$  quand  $S$  tend vers  $\infty$ , par deux méthodes.

1. Montrer que le prix du put décroît plus vite que  $C_\alpha S^{-\alpha}$  en comparant le prix du put à  $C_\alpha S^{-\alpha}$  par le principe du maximum, pour un couple  $(\alpha, C_\alpha)$  bien choisi.
2. En utilisant le fait que  $0 \leq P(t, S) \leq \bar{P}(t, S)$ , où  $\bar{P}$  est le prix du put pour une volatilité égale à  $\bar{\sigma} = \max_{[0, T] \times \mathbb{R}_+} \sigma$ , montrer que le prix du put tend vers zéro plus vite que  $S^{-N}$ , pour tout  $N > 0$ .