Méthodes déterministes en finance :

TD du 17 octobre 2011

Stabilité du schéma de Crank-Nicolson

On considère l'équation de la chaleur sur $(0,1)$ avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} \partial_t u - \dfrac{\sigma^2}{2}\partial_{x,x} u = f, \\ u(t,0) = (t,1) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

On discrétise cette équation par le schéma de Crank-Nicolson, sur une grille uniforme en temps et espace, de pas respectivement δt et h :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\delta t} - \frac{\sigma^2}{4}\left(\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} + \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2}\right) = \frac{1}{2}\left(F_j^n + F_j^{n+1}\right). \tag{2}$$

Analyser la stabilité L^2 et la stabilité L^∞ de ce schéma.

Le schéma de Gear

1. En utilisant des développement limités de Taylor, étudier l'erreur de consistance de l'approximation

$$\partial_t u(t_{n+1}) \simeq \frac{1}{2\delta t}\left(3u(t_{n+1}) - 4u(t_n) + u(t_{n-1})\right).$$

2. En déduire un schéma d'odre 2 en espace et en temps pour discrétiser l'équation de Black Scholes, en variable $x = \ln(S)$. Etudier la stabilité du schéma[1]. Comment discrétiser l'équation sur le premier pas de temps ?

Complexité

1. Quelle est la complexité d'un schéma d'Euler explicite pour discrétiser l'équation de Black Scholes, en fonction du nombre de pas de temps et du nombre de pas d'espace ? Est-il possible de paralléliser les calculs ?
2. Même question pour un schéma d'Euler implicite. On discutera en particulier l'importance de la méthode utilisée pour résoudre le système linéaire.

[1] On pourra utiliser l'analyse de Fourier par exemple, en écrivant le schéma sur le couple $(u(t_{n+1}), u(t_n))$.