Méthodes déterministes en finance :

TD : Méthode des différences finies

Stabilité du schéma de Crank-Nicolson

On considère l'équation de la chaleur sur $(0,1)$ avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} \partial_t u - \dfrac{\sigma^2}{2}\partial_{x,x} u = f, \\ u(t,0) = (t,1) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

On discrétise cette équation par le schéma de Crank-Nicolson, sur une grille uniforme en temps et espace, de pas respectivement δt et h :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\delta t} - \frac{\sigma^2}{4}\left(\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} + \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2}\right) = \frac{1}{2}\left(F_j^n + F_j^{n+1}\right). \tag{2}$$

Analyser la stabilité L^2 et la stabilité L^∞ de ce schéma.

Le schéma de Gear

1. En utilisant des développement limités de Taylor, étudier l'erreur de consistance de l'approximation

$$\partial_t u(t_{n+1}) \simeq \frac{1}{2\delta t}\left(3u(t_{n+1}) - 4u(t_n) + u(t_{n-1})\right).$$

2. En déduire un schéma d'odre 2 en espace et en temps pour discrétiser l'équation de Black Scholes, en variable $x = \ln(S)$. Etudier la stabilité du schéma [1]. Comment discrétiser l'équation sur le premier pas de temps ?

Complexité

1. Quelle est la complexité d'un schéma d'Euler explicite pour discrétiser l'équation de Black Scholes, en fonction du nombre de pas de temps et du nombre de pas d'espace ? Est-il possible de paralléliser les calculs ?
2. Même question pour un schéma d'Euler implicite. On discutera en particulier l'importance de la méthode utilisée pour résoudre le système linéaire.

1. On pourra utiliser l'analyse de Fourier par exemple, en écrivant le schéma sur le couple $(u(t_{n+1}), u(t_n))$.