Méthodes déterministes en finance

TP du 31 octobre 2011

Schéma aux différences finies pour l'équation de Black Scholes avec $x = \ln(S)$ comme variable : illustration des propriétés des schémas aux différences finies

On s'intéresse à la discrétisation par différences finies de l'équation de Black Scholes avec pour variable $x = \ln(S)$, où S est la valeur du sous-jacent : pour $0 \le t \le T$ et $x_{\min} \le x \le x_{\max}$,

$$\begin{cases} \partial_t u - \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\partial_x u - \dfrac{\sigma^2}{2}\partial_{x,x} u + ru = 0, \\ u(t, x_{\min}) = g(t),\ u(t, x_{\max}) = d(t), \\ u(0,x) = \phi(\exp(x)). \end{cases} \tag{1}$$

Le pay-off $\phi(S)$ vaut soit $(S-K)_+$ (call), soit $(K-S)_+$ (put). On suppose que σ et r sont constants, de telle sorte que l'on peut comparer le résultat obtenu par différences finies avec la valeur exacte obtenue par la formule de Black-Scholes[1]. On choisit $x_{\max} = \ln(5K)$ et $x_{\min} = -x_{\max}$. Les points de la grille en espace sont les $x_i = x_{\min} + (i-1)\,dx$ pour $1 \le i \le I+1$ où $I = (x_{\max} - x_{\min})/dx$ est le nombre d'intervalles en espace[2]. Le nombre de pas de temps est N, le pas de temps est $dt = T/N$ et on note $t_n = n\,dt$. On considère trois types de discrétisation en temps : Euler explicite, Euler implicite ou Crank Nicolson.

1. Prendre connaissance du programme Scilab `BS_log_Q.sce`. Compléter la partie conditions initiales, pour un put et un call.
2. On discrétise l'équation en chaque point x_i, pour $2 \le i \le I$. Construire la matrice de diffusion $Diff$, discrétisation de l'opérateur $\frac{\sigma^2}{2}\partial_{x,x}$ et la matrice d'advection Adv, discrétisation de l'opérateur $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\partial_x$. On utilisera un schéma centré. Ces matrices sont de tailles $(I-1) \times (I+1)$.
3. A chaque pas de temps, connaissant $U^n \in \mathbb{R}^{I+1}$ on doit résoudre le problème :
$$GU^{n+1} = DU^n \tag{2}$$
avec G et D deux matrices de tailles $(I-1)\times(I+1)$. Pour chacun des trois schémas en temps, Donner l'expression des matrices G et D en fonction de Adv, $Diff$ et de la matrice correspondant à l'application identité, notée $D2$ dans le code. Compléter la partie définition des matrices.
4. La première coordonnée et la dernière coordonnée de U^{n+1} sont connues (cf. les conditions aux limites). Le problème (2) se réécrit donc :
$$\overline{G}\,\overline{U}^{n+1} = DU^n - GC^{n+1} \tag{3}$$
où $\overline{G} \in \mathbb{R}^{(I-1)\times(I-1)}$ est extraite de la matrice G et définie par $\overline{G}_{i,j} = G_{i,j+1}$ pour $1 \le i,j \le I-1$, et $\overline{U}^{n+1} \in \mathbb{R}^{(I-1)}$ est extrait du vecteur U^{n+1} et défini par $\overline{U}_j^{n+1} = U_{j+1}^{n+1}$ pour $1 \le j \le I-1$:

[1] Evidemment, la méthode des différences finies n'a auncun intérêt numériquement dans ce cas. Mais elle se généralise immédiatement au cas où $r = r(t)$ et $\sigma = \sigma(t,S)$, pour lequel on ne dispose plus de formule analytique.

[2] En Scilab, les composantes des matrices et des vecteurs sont numérotées à partir de 1, d'où la définition des x_i.

$$GU^{n+1} = \begin{bmatrix} * & & 0 \\ 0 & \overline{G} & 0 \\ 0 & & * \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g(t_{n+1}) \\ \overline{U}^{n+1} \\ d(t_{n+1}) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur C^{n+1} est le vecteur conditions aux limites : $C^{n+1}(1) = g(t_{n+1})$, $C^{n+1}(i) = 0$ pour $2 \leq i \leq I$ et $C^{n+1}(I+1) = d(t_{n+1})$. Quelles sont de bonnes conditions aux limites g et d pour un call ou un put ? Compléter la partie conditions aux limites. Compléter la partie calcul de U dans la boucle en temps.

5. Pour calculer le prix pour une valeur du sous-jacent S_0, on se propose d'utiliser une interpolation linéaire. Compléter la partie calcul du prix.
6. On commence par étudier le comportement du schéma d'Euler explicite. On considère un call avec comme paramètres $T = 1$, $r = 0.1$ et $K = 100$. Observer la courbe du prix en fonction de S_0 pour les valeurs des paramètres (σ, I, N) suivantes : $(0.1, 500, 13)$, $(0.1, 500, 16)$, $(0.1, 1000, 60)$, $(0.1, 500, 63)$, $(0.2, 500, 60)$, $(0.2, 500, 64)$. Expliquer les résultats obtenus. Que faire pour remédier à ce problème ?
7. On s'intéresse maintenant au schéma d'Euler implicite. Pourquoi le système (3) est plus difficile à résoudre dans ce cas ? Pourquoi utilise-t'on des matrices creuses (*sparse* en anglais) dans Scilab ? Le problème observé à la question précédente est-il résolu ? Qu'obtient-on quand on calcule le prix d'un put avec les paramètres suivants : $T = 1$, $r = 0.1$, $S_0 = 100$, $K = 100$, $\sigma = 0.05$, $I = 100$, $N = 100$? Expliquer ce phénomène.
8. Comment modifier le schéma pour résoudre le problème observé à la question précédente ? Illustrer la réponse par un test numérique.
9. Utiliser le programme complet `BS_log.sce` pour étudier comment l'erreur sur $u(T)$, en norme L^∞ en espace, varie en fonction de I et N, pour le schéma d'Euler implicite. On pourra considérer par exemple un put et le jeu de paramètres $T = 1$, $r = 0.1$, $K = 100$, $\sigma = 0.1$, avec, pour la convergence en espace $N = 2000$ et $I \in \{200, 400, 800, 1600\}$, et pour la convergence en temps $I = 1600$ et $N \in \{50, 100, 200, 400\}$ (cf. Figure 1). Quelles sont les vitesses de convergence observées ? Commenter. Comparer avec l'erreur obtenue pour un schéma de Crank Nicolson.

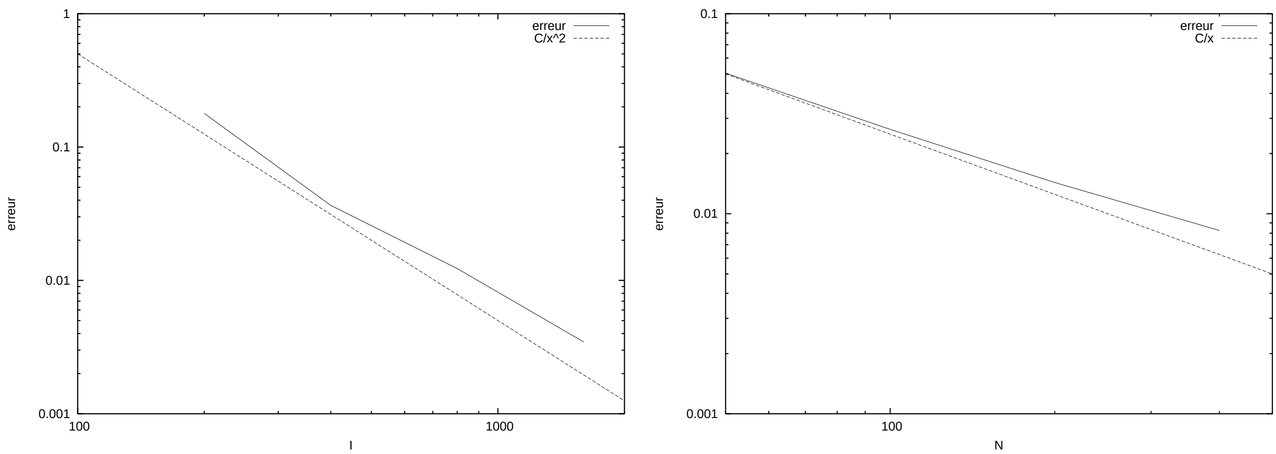

FIG. 1 – Norme L^∞ de l'erreur en fonction de I à gauche et de N à droite pour un put avec $T = 1$, $r = 0.1$, $K = 100$, $\sigma = 0.1$, $N = 2000$, et un schéma en temps d'Euler implicite.

Schéma aux différences finies pour l'équation de Black Scholes avec S comme variable

On veut maintenant construire un schéma aux différences finies pour l'équation de Black Scholes sans faire le changement de variable $x = \ln(S)$. Le problème à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \partial_t P - rS\partial_S P - \dfrac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{S,S} P + rP = 0, \\ P(t,0) = g(t),\ P(t, S_{\max}) = d(t), \\ P(0,S) = \phi(S). \end{cases} \tag{4}$$

On choisit $S_{\max} = 5K$. Les points de la grille en espace sont les $S_i = (i-1)\,dS$ pour $1 \leq i \leq I+1$ où $I = S_{\max}/dS$ est le nombre d'intervalles en espace.

1. Proposer un schéma aux différences finies pour discrétiser (4). Quelles sont les modifications à apporter au programme `BS_log.sce` pour implémenter ce schéma ? Compléter le programme `BS_Q.sce`(définition des matrices Adv et $Diff$, conditions aux limites, conditions initiales). Comment généraliser ce schéma au cas où $r = r(t)$ et $\sigma = \sigma(t, S)$?
2. Comparer les résultats obtenus avec la discrétisation de (1) avec ceux obtenus avec la discrétisation de (4). Considérer par exemple un call, avec les paramètres $T = 1$, $r = 0.1$, $S_0 = 100$, $K = 100$, $\sigma = 0.05$, $I = 500$, $N = 50$, et un schéma de Crank Nicolson. Commenter.
3. Utiliser le programme `BS_erreur.sce` pour étudier l'erreur en chaque point (t, S), pour $0 \leq t \leq T$ et $0 \leq S \leq S_{\max}$ (cf. Figure 2). Comment selon vous pourrait-on construire des schémas plus efficaces ?

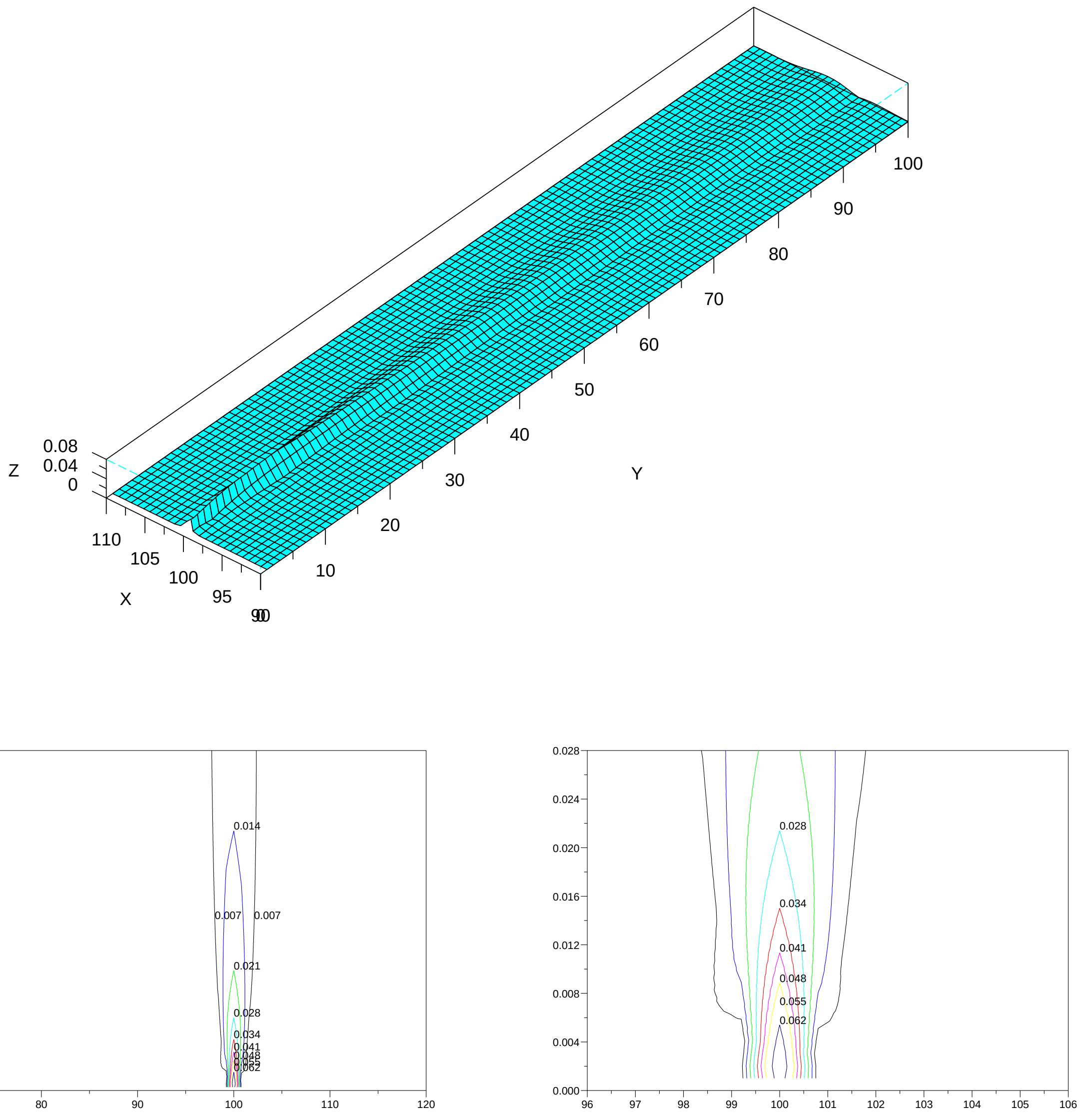

FIG. 2 – Erreur en chaque point (t, S). Paramètres : prix d'un put avec $T = 0.1$, $r = 0.1$, $K = 100$, $\sigma = 0.1$, $I = 250$, $N = 100$, $S_{\max} = 2K$ et un schéma en temps d'Euler implicite. En haut, l'erreur est en ordonnée (Z), l'axe X représente le prix S, et l'axe Y les indices des pas de temps. En bas, les isocontours (lignes de niveau) de l'erreur sont représentés, avec en abscisse le prix S et en ordonnée le temps t.