

# Méthodes déterministes en finance :

TD du 7 novembre 2011

## Stabilité des schémas en temps

On considère l'équation de la chaleur sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u = f, & \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{pour tout } x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

On discrétise cette équation par une méthode d'éléments finis.

1. Ecrire la formulation variationnelle ainsi que le problème discrétisé en espace.
2. Analyser la stabilité dans le norme  $L_t^\infty(L_x^2) \cap L_t^2(H_{0,x}^1)$  des schémas en temps suivants : Euler explicite, Euler implicite, Crank-Nicolson.
3. Dans le cas où  $\Omega = (0, 1)$ , le maillage est uniforme de pas  $h$ , et on utilise des éléments finis  $\mathbb{P}^1$ , comparer avec les résultats de stabilité obtenus sur les schémas de type différences finies.

## Méthode de Aubin et Nitsche<sup>1</sup>

Soit  $u$  la solution du problème de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

On suppose que  $f \in L^2(\Omega)$  et que le domaine  $\Omega$  est convexe et régulier de telle sorte que la solution  $u$  de (2) est telle que  $u \in H^2(\Omega)$ . On approxime ce problème par une méthode d'éléments finis  $\mathbb{P}^1$  (on note  $V_h$  l'espace d'approximation). Soit  $u_h$  la solution du problème discrétisé.

1. Rappeler dans ce cas pourquoi on a l'estimation suivante sur l'erreur  $e = u - u_h$  :

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch.$$

On veut maintenant étudier l'erreur en norme  $L^2$ . On introduit pour cela la solution  $g$  du problème :

$$\begin{cases} -\Delta g = e, & \text{dans } \Omega, \\ g = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

2. Rappeler pourquoi on a l'estimation suivante sur  $g$  :

$$\|g\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|e\|_{L^2(\Omega)}.$$

---

<sup>1</sup>Cet exercice est plus difficile. On peut commencer par considérer le cas  $\Omega = (0, 1)$  pour comprendre. La généralisation au cas  $\Omega$  quelconque nécessite de connaître des résultats de régularité elliptique (cf. par exemple H. Brezis, Analyse fonctionnelle, chapitre 9.)

3. Montrer que pour tout  $v_h \in V_h$ ,

$$\|e\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \nabla e \cdot \nabla (g - v_h)$$

4. En utilisant les propriétés d'interpolation des espaces d'éléments finis, en déduire que :

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2.$$