Méthodes déterministes en finance :

TD : Méthode des éléments finis.

Stabilité des schémas en temps

On considère l'équation de la chaleur sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} \partial_t u - \dfrac{\sigma^2}{2}\Delta u = f, & \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et } x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{pour tout } x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

On discrétise cette équation par une méthode d'éléments finis.

1. Ecrire la formulation variationnelle ainsi que le problème discrétisé en espace.
2. Analyser la stabilité dans le norme $L^\infty_t(L^2_x) \cap L^2_t(H^1_{0,x})$ des schémas en temps suivants : Euler explicite, Euler implicite, Crank-Nicolson.
3. Dans le cas où $\Omega = (0,1)$, le maillage est uniforme de pas h, et on utilise des éléments finis $\mathbb{P}^1$, comparer avec les résultats de stabilité obtenus sur les schémas de type différences finies.

Méthode de Aubin et Nitsche [1]

Soit u la solution du problème de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

On suppose que $f \in L^2(\Omega)$ et que le domaine Ω est convexe et régulier de telle sorte que la solution u de (2) est telle que $u \in H^2(\Omega)$. On approxime ce problème par une méthode d'éléments finis $\mathbb{P}^1$ (on note V_h l'espace d'approximation). Soit u_h la solution du problème discrétisé.

1. Rappeler dans ce cas pourquoi on a l'estimation suivante sur l'erreur $e = u - u_h$:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch.$$

On veut maintenant étudier l'erreur en norme L^2. On introduit pour cela la solution g du problème :

$$\begin{cases} -\Delta g = e, & \text{dans } \Omega, \\ g = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

2. Rappeler pourquoi on a l'estimation suivante sur g :

$$\|g\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|e\|_{L^2(\Omega)}.$$

1. Cet exercice est plus difficile. On peut commencer par considérer le cas $\Omega = (0,1)$ pour comprendre. La généralisation au cas Ω quelconque nécessite de connaître des résultats de régularité elliptique (cf. par exemple H. Brezis, Analyse fonctionnelle, chapitre 9.)

3. Montrer que pour tout $v_h \in V_h$,

$$\|e\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla e \cdot \nabla(g - v_h)$$

4. En utilisant les propriétés d'interpolation des espaces d'éléments finis, en déduire que :

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2.$$