

Méthodes Déterministes en Finance

TP DU 21 NOVEMBRE 2011

INTRODUCTION AU LOGICIEL FREEFEM++.

Le logiciel FREEFEM++ permet de résoudre facilement des E.D.P. en dimension 2 (ou 3) d'espace, à l'aide d'une discrétisation par la méthode des éléments finis.

1 Documentation

- Site FREEFEM++: Voir par exemple la page web de F. Hecht:

<http://www.ann.jussieu.fr/~hecht>

- Voir aussi la doc et les nombreux exemples dans le répertoire d'installation de FREEFEM++.

2 Problème stationnaire

Télécharger le fichier `laplace.edp` et faire, dans une fenêtre de commande:

```
FreeFem++ laplace.edp &
```

En cas de problème, sous linux on pourra aussi essayer

```
FreeFem++-x11 laplace.edp &
```

ou encore (option sans graphiques)

```
FreeFem++-nw laplace.edp
```

Editer le fichier `laplace.edp`

Le problème résolu correspond à l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

dans un domaine qui est défini par la réunion d'arêtes spécifiques.

Pour comprendre comment rentrer cette équation dans FREEFEM++, on écrira la formulation variationnelle du problème.

On observera que certaines variables, comme `x`, `y`, `dx`, `dy`, sont réservées en FREEFEM++.

3 Exemple de convection pure

(i) Exécuter maintenant le programme `convect.edp`. Le problème résolu correspond à la rotation d'une condition initiale u_0 :

$$\partial_t u + (-y, x) \cdot \nabla u = 0, \quad t > 0, (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$u(t = 0, x, y) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (2)$$

sur un disque Ω centré à l'origine. u_0 représente une "bosse" avec des valeurs nulles au bord du disque. On notera l'utilisation de la fonction `convect`.

Faire tourner l'exemple avec $T = \pi$ (1 demi-tour) et $N = 1$, $N = 10$ ou $N = 100$. Quel choix de N est le meilleur ?

Observer aussi le comportement du maximum de la fonction calculée (sur le graphique).

(ii) **Méthode "convect"**. Reprendre les tests avec $T = \pi$, $N = 10$ fixé, et faire maintenant varier le paramètre $M \in \{40, 80, 160\}$ (nombre de points sur le bord du cercle et à partir duquel est construit le maillage intérieur). Observer une diminution de l'erreur par un facteur 2 lorsque M est multiplié par 2.

(iii) **Méthode Semi-Lagrangienne**. Dans la boucle principale, commenter la partie `convect` et décommenter la partie

```
t1=dt; v=v(xrot,yrot);
```

Reprendre les tests avec toujours $T = \pi$, $N = 10$ fixé, et $M \in \{40, 80, 160\}$. On doit observer une diminution de l'erreur par un facteur 4 lorsque M est multiplié par 2. Qu'en déduire sur l'ordre de la méthode en espace ?

(iv) On change maintenant les éléments P1 vers P2, vérifier que l'ordre est 3.

Complément sur la méthode des caractéristiques. De manière générale, supposons qu'on cherche à approcher pour $S \in \mathbb{R}^2$, et $A(t, (x, y)) = (-y, x)$ champ de \mathbb{R}^2 , la dérivée particulaire (ou convective):

$$\partial_t u + A(t, S) \cdot \nabla u$$

1) Soit $\tilde{u}(t, S) := u(t, X^{t_{n+1}, S}(t))$ où $X(t) = X^{t_{n+1}, S}(t)$ est le champ intégral associé à A :

$$\partial_t X(t) = A(t, X(t))$$

$$X(t_{n+1}) = S.$$

On constate que $\partial_t \tilde{u}(t, S) = (\partial_t u + A \cdot \nabla u)(t, X^{t_{n+1}, S}(t))$. On en déduit que la solution du problème d'advection $\frac{\partial}{\partial t} u + A(t, S) \cdot \nabla u = 0$ et $u(t, S) = u_0(S)$ est donnée par la formule

$$u(t, X^{t_{n+1}, S}(t)) = u_0(S).$$

2) On en déduit aussi pour le pb d'advection:

$$u(t_{n+1}, S) = u(t_n, X^{t_{n+1}, S}(t_{n+1} - \delta t)).$$

Le membre de droite, interpolé sur un maillage (S_i) (c'est à dire où $u(t_n, \cdot)$ est calculé par une certaine interpolation à partir des valeurs $u(t_n, S_i)$), correspond à la fonction `convect` de FreeFem++. Si `u` code les valeurs $u(t_n, S_i)$, alors

$$u(t_n, X^{t_{n+1}, S_i}(t_{n+1} - \delta t)) \simeq \text{convect}([Ax, Ay], -dt, u)$$

3) Si l'on possède une méthode d'intégration des caractéristiques approchée, $\bar{X}(-\delta t) \simeq X^{t_{n+1}, S}(t_{n+1} - \delta t)$, alors on peut aussi utiliser l'interpolation (ou méthode dite "Semi-Lagrangienne")

$$u(t_{n+1}, S) \simeq [u(t_n, \cdot)](\bar{X}(-\delta t)).$$

4 Option Européenne à deux actifs

On s'intéresse à un modèle de Black et Scholes à deux actifs. Le programme correspondant à tester est `bs.edp`.

On note $x = S_1$, $y = S_2$ les valeurs des 2 actifs. L'EDP est défini sur un domaine tronqué $\Omega = [0, \bar{S}_1] \times [0, \bar{S}_2]$. Dans le cas de $r = 0$ (taux nul), on rappelle qu'elle s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t} P - \frac{1}{2} \sigma_1^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \sigma_2^2 y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \rho \sigma_1 \sigma_2 x y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 0, \quad t > 0, (x, y) \in \Omega, \quad (3)$$

$$P(t = 0, x, y) = (K - \text{Max}(x, y))_+ \quad (x, y) \in \Omega \quad (4)$$

$$\begin{cases} P(t, \bar{S}_1, y) = 0 & \text{Bord droit } \Gamma_d \\ P(t, x, \bar{S}_2) = 0 & \text{Bord haut } \Gamma_h \end{cases} \quad (5)$$

(La deuxième relation correspond à la condition initiale, la dernière relation correspond aux "conditions aux limites").

1. On considère aussi d'abord le cas $\rho = 0$ (terme croisé nul: browniens non corrélés).

- Ecrire une formulation variationnelle du problème.¹
- Faire tourner le programme `bs.edp` qui correspond à cette formulation.

Note: la commande `+on(bb,cc,u=0)` dans la définition du problème `problem eq1` correspond à mettre la condition de dirichlet $u = 0$ au bords `bb` et `cc` qui correspondent ici à Γ_d et Γ_h .

2. Modifier maintenant le programme `bs.edp` afin de traiter correctement le cas

¹Solution: si on note $A(x, y) = \begin{pmatrix} a_1(x, y) \\ a_2(x, y) \end{pmatrix}$ avec $a_1(x, y) = \sigma_1^2 x$ et $a_2(x, y) = \sigma_2^2 y$, ainsi que $\nabla P = \begin{pmatrix} \partial_x P \\ \partial_y P \end{pmatrix}$ alors on obtient

$$\forall v \in V_h, \quad \int_{\Omega} (\partial_t P + A \cdot \nabla P) v + \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_1^2 x^2 \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 y^2 \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} = 0$$

avec

$$V_h := \left\{ v \in L^2(\Omega), \quad x \partial_x v, \quad y \partial_y v \in L^2(\Omega), \quad v|_{\Gamma_d \cup \Gamma_h} = 0 \right\}.$$

général : $\rho \neq 0$ et avec un taux d'intérêt $r > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}P - \frac{1}{2}\sigma_1^2x^2\frac{\partial^2P}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sigma_2^2y^2\frac{\partial^2P}{\partial y^2} - \rho\sigma_1\sigma_2xy\frac{\partial^2P}{\partial x\partial y} \\ -rx\frac{\partial P}{\partial x} - ry\frac{\partial P}{\partial y} + rP = 0, \quad t > 0, (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (6a)$$

$$P(t = 0, x, y) = (K - \text{Max}(x, y))_+ \quad (x, y) \in \Omega \quad (6b)$$

$$\begin{cases} P(t, \bar{S}_1, y) = 0 & \text{Bord droit } \Gamma_d \\ P(t, x, \bar{S}_2) = 0 & \text{Bord haut } \Gamma_h \end{cases} \quad (6c)$$

(Solution possible: voir fichier `bs_sol.edp`) Justifier les conditions aux limites (6c).

3. Comment traiter le même problème mais avec Payoff $(K - \min(s1, s2))_+$? Pourquoi l'approche précédente ne marche pas ? ²

²Indication: On peut utiliser les conditions aux limites de Neumann. On vérifiera que cela revient à ne pas mettre de conditions aux limites dans l'approche variationnelle. L'approche précédente ne marche pas car la solution cherchée n'est pas nulle partout au bord du domaine même en première approximation.