Méthodes Déterministes en Finance

TP du 26 Novembre 2012

Introduction au logiciel FreeFem++.

Le logiciel FreeFem++ permet de résoudre facilement des E.D.P. en dimension 2 (ou 3) d'espace, à l'aide d'une discrétisation par la méthode des éléments finis.

1 Documentation

• Site FreeFem++: Voir par exemple la page web de F.H̃echt:

`http://www.ann.jussieu.fr/~hecht`

• Voir aussi la doc et les nombreux exemples dans le répertoire d'installation de FreeFem++.

2 Problème stationnaire

Télécharger le fichier `laplace.edp` et faire, dans une fenêtre de commande: [1]

```
FreeFem++ laplace.edp &
```

Editer le fichier `laplace.edp`

Le problème résolu correspond à l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, \qquad x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

dans un domaine qui est définit par la réunion d'arêtes spécifiques.

Pour comprendre comment rentrer cette équation dans FreeFem++, on écrira la formulation variationnelle du problème.

On observera que certaines variables, comme `x`, `y`, `dx`, `dy`, sont réservées en FreeFem++.

3 Exemple de convection pure

(i) Exécuter maintenant le programme `convect.edp`. Le problème résolu correspond à la rotation d'une condition initiale u_0:

$$\partial_t u + (-y, x) \cdot \nabla u = 0, \quad t > 0, (x, y) \in \Omega \tag{1}$$

$$u(t = 0, x, y) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \tag{2}$$

[1]En cas de problème, sous linux on pourra aussi essayer `FreeFem++-x11 laplace.edp &` ou encore (option sans graphiques) `FreeFem++-nw laplace.edp`

sur un disque Ω centré à l'origine. u_0 représente une "bosse" avec des valeurs nulles au bord du disque. On notera l'utilisation de la fonction `convect`.

Faire tourner l'exemple avec $T = \pi$ (1 demi-tour) et $N = 1$, $N = 10$ ou $N = 100$. Quel choix de N est le meilleur ?

Observer aussi le comportement du maximum de la fonction calculée (sur le graphique).

(ii) **Méthode "convect"**. Reprendre les tests avec $T = \pi$, $N = 10$ fixé, et faire maintenant varier le paramètre `M`$\in \{40,\ 80,\ 160\}$ (nombre de points sur le bord du cercle et à partir duquel est construit le maillage intérieur). Observer une diminution de l'erreur par un facteur 2 lorsque M est multiplié par 2.

(iii) **Methode Semi-Lagrangienne.** Dans la boucle principale, commenter la partie `convect` et décommenter la partie

```
t1=dt; v=v(xrot,yrot);
```

Reprendre les tests avec toujours $T = \pi$, $N = 10$ fixé, et `M`$\in \{40,\ 80,\ 160\}$. On doit observer une diminution de l'erreur par un facteur 4 lorsque M est multiplié par 2. Qu'en déduire sur l'ordre de la méthode en espace ?

(iv) On change maintenant les elements `P1` vers `P2`, vérifier que l'ordre est 3.

Complément sur la méthode des caractéristiques. De manière générale, supposons qu'on cherche à approcher pour $S \in \mathbb{R}^2$, et $A(t,(x,y)) = (-y,x)$ champ de $\mathbb{R}^2$, la dérivée particulaire (ou convective):

$$\partial_t u + A(t,S)\cdot\nabla u$$

1) Soit $\tilde{u}(t,S) := u(t, X^{t_{n+1},S}(t))$ où $X(t) = X^{t_{n+1},S}(t)$ est le champ intégral associé à A:

$$\begin{aligned} &\partial_t X(t) = A(t, X(t)) \\ &X(t_{n+1}) = S. \end{aligned}$$

On constate que $\partial_t\tilde{u}(t,S) = (\partial_t u + A\cdot\nabla u)(t, X^{t_{n+1},S}(t))$. On en déduit que la solution du problème d'advection $\frac{\partial}{\partial t}u + A(t,S)\cdot\nabla u = 0$ et $u(t,S) = u_0(S)$ est donnée par la formule

$$u(t, X^{t_{n+1},S}(t)) = u_0(S).$$

2) On en déduit aussi pour le pb d'advection:

$$u(t_{n+1},S) = u(t_n, X^{t_{n+1},S}(t_{n+1}-\delta t)).$$

Le membre de droite, interpolé sur un maillage (S_i) (c'est à dire où $u(t_n,.)$ est calculé par une certaine interpolation à partir des valeurs $u(t_n,S_i)$), correspond à la fonction `convect` de FreeFem++. Si `u` code les valeurs $u(t_n,S_i)$, alors

$$u(t_n, X^{t_{n+1},S_i}(t_{n+1}-\delta t)) \simeq \texttt{convect([Ax,Ay],-dt,u)}$$

3) Si l'on possède une methode d'intégration des caractéristiques approchée, $\bar{X}(-\delta t) \simeq X^{t_{n+1},S}(t_{n+1}-\delta t)$, alors on peut aussi utiliser l'interpolation (ou méthode dite "Semi-Lagrangienne")

$$u(t_{n+1},S) \simeq [u(t_n,.)]\Big(\bar{X}(-\delta t)\Big).$$

4 Option Européenne à deux actifs

On s'intéresse à un modèle de Black et Scholes à deux actifs. Le programme correspondant à tester est `bs.edp`.

On note $x = S_1$, $y = S_2$ les valeurs des 2 actifs. L'EDP est définit sur un domaine tronqué $\Omega = [0, \bar{S}_1] \times [0, \bar{S}_2]$. Dans le cas de $r = 0$ (taux nul), on rappelle qu'elle s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}P - \frac{1}{2}\sigma_1^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \rho\sigma_1\sigma_2 xy \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 0, \;\; t > 0, (x, y) \in \Omega, \tag{3}$$

$$P(t = 0, x, y) = (K - Max(x, y))_+ \quad (x, y) \in \Omega \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} P(t, \bar{S}_1, y) = 0 & \text{Bord droit } \Gamma_d \\ P(t, x, \bar{S}_2) = 0 & \text{Bord haut } \Gamma_h \end{array} \right. \tag{5}$$

(La deuxième relation correspond à la condition initiale, la dernière relation correpond aux "conditions aux limites").

1. On considère aussi d'abord le cas $\rho = 0$ (terme croisé nul: browniens non correlés).

• Ecrire une formulation variationnelle du problème.[2]

• Faire tourner le programme `bs.edp` qui correspond à cette formulation.

Note: la commande `+on(bb,cc,u=0)` dans la définition du problème `problem eq1` correspond à mettre la condition de dirichlet $u = 0$ au bords `bb` et `cc` qui correspondent ici à Γ_d et Γ_h.

2. Modifier maintenant le programme `bs.edp` afin de traiter correctement le cas général : $\rho \neq 0$ et avec un taux d'intérêt $r > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}P - \frac{1}{2}\sigma_1^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sigma_2^2 y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \rho\sigma_1\sigma_2 xy \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} & \\ -rx\frac{\partial P}{\partial x} - ry\frac{\partial P}{\partial y} + rP = 0, \qquad t > 0, (x, y) \in \Omega, & \end{aligned} \tag{6a}$$

$$P(t = 0, x, y) = (K - Max(x, y))_+ \quad (x, y) \in \Omega \tag{6b}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} P(t, \bar{S}_1, y) = 0 & \text{Bord droit } \Gamma_d \\ P(t, x, \bar{S}_2) = 0 & \text{Bord haut } \Gamma_h \end{array} \right. \tag{6c}$$

(Solution possible: voir fichier `bs_sol.edp`) Justifier les conditions aux limites (6c).

---

[2]Solution: si on note $A(x, y) = \begin{pmatrix} a_1(x, y) \\ a_2(x, y) \end{pmatrix}$ avec $a_1(x, y) = \sigma_1^2 x$ et $a_2(x, y) = \sigma_2^2 y$, ainsi que $\nabla P = \begin{pmatrix} \partial_x P \\ \partial_y P \end{pmatrix}$ alors on obtient

$$\forall v \in V_h, \quad \int_\Omega (\partial_t P + A \cdot \nabla P)v + \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\sigma_1^2 x^2 \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 y^2 \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right\} = 0$$

avec

$$V_h := \left\{ v \in L^2(\Omega), \; x\partial_x v, \; y\partial_y v \in L^2(\Omega), \; v\big|_{\Gamma_d \cup \Gamma_h} = 0 \right\}.$$

3. Comment traiter le même problème mais avec Payoff $(K - \min(s1, s2))_+$? Pourquoi l'approche précédente ne marche pas ? [3]

[3] Indication: On peut utiliser les conditions aux limites de Neumann. On vérifiera que cela revient à ne pas mettre de conditions aux limites dans l'approche variationnelle. L'approche précédente ne marche pas car la solution cherchée n'est pas nulle partout au bord du domaine même en première approximation.