

## MÉTHODES DÉTERMINISTES EN FINANCE

TP DU 26 NOVEMBRE 2012

## Éléments finis pour une option Européenne à un actif.

On désire tester la méthode des éléments finis pour le calcul d'un put européen à un actif. L'équation de B&S sur un domaine tronqué  $[0, S_{max}]$  est:

$$\partial_t u - \frac{\sigma^2}{2} s^2 \partial_{s,s} u - r s \partial_s u + r u = 0, \quad 0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq S_{max}, \quad (1a)$$

$$u(t, S_{max}) = u_d(t), \quad t \in (0, T) \quad (\text{Conditions aux limites}) \quad (1b)$$

$$u(0, s) = \varphi(s), \quad s \in (0, S_{max}) \quad (\text{Condition initiale}) \quad (1c)$$

On supposera que  $S_{max} > K$ . On veut calculer en particulier  $u(T, s)$  (correspondant à une estimation du prix de l'option à la date  $T$  avant échéance).

Dans le cas de l'option put, on prend l'approximation

$$u_d(t) = 0.$$

On rappelle que la formulation variationnelle de (1a) s'écrit alors

$$\begin{cases} (\partial_t u, v) + a(u, v) = 0, & \forall v \in V_0, p.p. t \in (0, T), \\ u(0, \cdot) = \varphi \end{cases} \quad (2)$$

où

$$V_0 := \{v \in L^2(0, S_{max}), s \partial_s v \in L^2(0, S_{max}), v(S_{max}) = 0\}$$

et

$$a(w, v) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{S_{max}} s^2 \partial_s w \partial_s v + \int_0^{S_{max}} (-r + \sigma^2) s \partial_s w v + r \int_0^{S_{max}} w v \quad (3)$$

1. Télécharger le fichier `ef_Q.sce` Il s'agit d'une version similaire au programme de différences finies. Suivant la valeur du paramètre `METHODE`, il correspond à:

- `METHODE='DF'` : discrétisation par différences finies (Crank-Nicolson en temps), avec une approximation centré pour la dérivée d'ordre un en espace.
- `METHODE='EF'` : discrétisation par éléments finis (Crank-Nicolson en temps), cette partie nécessitant quelques lignes de programme à compléter.

- Vérifier que le programme fonctionne avec les paramètres `METHODE='DF'`. Tester avec  $(N, I + 1) = (100, 100)$  puis  $(100, 1000)$ , noter les erreurs obtenues en norme  $L^\infty$

- Pour la suite mettre `METHODE='EF'`, et  $N = 10, I + 1 = 10$ .

L'objectif va être d'obtenir une erreur similaire à la méthode DF mais avec un nombre de points  $I$  plus faible.

2. **Discrétisation spatiale.** On introduit un maillage spatial non nécessairement régulier de  $[0, S_{max}]$  avec  $I$  points intérieurs:

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_I < s_{I+1} = S_{max},$$

On note  $h_i$  les pas successifs

$$h_i := s_{i+1} - s_i, \quad 0 \leq i \leq I$$

et  $h := \max_i h_i$ . On note  $V_h$  l'espace des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  correspondant,

$$V_h := \{v \in C^0([0, S_{max}]); \forall i, v|_{[s_i, s_{i+1}]} \in \mathbb{R}_1, \text{ et } v(S_{max}) = 0\}.$$

On cherche l'approximation de Galerkin  $u_h$  de  $u$ ,  $u_h(t)$  dans  $V_h$ , solution de

$$\begin{cases} (\partial_t u_h, v_h) + a(u_h, v_h) = 0, & \forall v_h \in V_h, t \in [0, T], \\ u_h(0, \cdot) = \varphi_h \text{ (approximation de } \varphi \text{ dans } V_h) \end{cases} \quad (4)$$

On peut décomposer  $u_h(t, \cdot)$  dans la base des éléments finis  $(\phi_0, \dots, \phi_M)$  correspondante:

$$u_h(t, s) := \sum_{i=0}^I u_i(t) \phi_i(s)$$

et on note  $U(t)$  le vecteur colonne des composantes:

$$U(t) := \begin{pmatrix} u_0(t) \\ \vdots \\ u_I(t) \end{pmatrix}$$

On n'inclut pas  $u_{I+1}$  dans les inconnues car on prend  $u_{I+1} = u_d(t) = 0$ .

a) Montrer que  $U : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$  est solution de l'équation différentielle suivante:

$$M \frac{dU}{dt} + AU = 0, \quad (5)$$

$$U(0) = U^0 \quad (6)$$

où  $M = (M_{ij}) := (\varphi_j, \varphi_i)$ ,  $A = (A_{ij}) := (a(\varphi_j, \varphi_i))$ , et  $U^0 = (\varphi(s_i))_{0 \leq i \leq I}$ .

b) Rappeler pourquoi  $M$  et  $A$  sont tridiagonales.

c) Ces matrices sont elles symétriques ?

**3.** a) Programmer la matrice  $M$  (voir la partie **COMPLETER M**; dans le cas  $r$  et  $\sigma$  constants, un formulaire est donné en annexe. On pourra le redémontrer à titre d'exercice).

b) Quelle approche générale peut-on envisager pour calculer ces matrices si  $\sigma = \sigma(s)$  ?

c) Compléter le calcul de l'erreur  $L^2$  (paramètre **errL2** dans fonction **plot**).

**4. Discrétisation temporelle.** On se donne un maillage en temps uniforme  $t_n := n\delta t$  avec  $\delta t := \frac{T}{N}$  et  $0 \leq n \leq N$ .

a) Donner un schéma de type Crank-Nicolson pour (5)-(6), à l'aide des matrices  $M$  et  $A$ .

On notera  $U^n = (U_i^n)$  l'approximation obtenue à l'instant  $t_n$ .

b) Programmer ce schéma (partie **COMPLETER CN**); on complètera par la même occasion les schémas **EE** et **EI**.

**5. Maillage non uniforme.** On veut programmer un deuxième maillage  $S_0, \dots, S_{I+1}$  avec le même nombre de points total et  $S_{I+1} = S_{max}$ , mais avec plus de points au voisinage de  $K$ . Pour cela on prend  $I + 1$  pair,  $I_1 := \frac{I+1}{2}$ ,

$$S_i^1 := K \frac{\log(i)}{\log(I_1 + 1)}, \quad i = 1, \dots, I_1,$$

$$S_j^2 := S_{max} - (S_{max} - K) \frac{\log(j)}{\log(I_1 + 1)}, \quad j = I_1 + 1, \dots, I_1 + 1,$$

et on définit le nouveau maillage  $S_{tot}$  de  $[0, S_{max}]$  par

$$S_{tot} = [S_1^1, \dots, S_{I_1}^1, S_{I_1+1}^2, S_{I_1+1}^2, \dots, S_1^2].$$

a) Tester le programme en prenant `MAILLAGE='UNIFORM'` ou `MAILLAGE='LOG'` suivant qu'on veuille un maillage uniforme ou logarithmique. Comparer la précision des méthodes EF et DF pour un même nombre de mailles  $I$  (ex:  $I + 1 = 100$ ,  $N = 100$ ): quel gain en précision observe-t-on, en norme  $L^\infty$  ?

b) Le schéma vérifie-t-il le principe du maximum ( $\min_j(U_j^n) \leq U_i^{n+1} \leq \max_j(U_j^n)$ ) ?

**6. Méthode des caractéristiques (facultatif).** On propose une autre méthode de discrétisation de la dérivée première  $\partial_s u$  dans (1a). On note d'abord que (1a) s'écrit aussi:

$$\partial_t u - (r - \sigma^2) s \partial_s u - \frac{\sigma^2}{2} \partial_s (s^2 \partial_s u) + r u = 0. \quad (7)$$

Entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , définissons pour chaque  $s \geq 0$  la fonction "caractéristique" notée  $X(t, s) = X^{t_{n+1}}(t, s)$ , solution de l'équation différentielle en temps:

$$\begin{aligned} \partial_t X(t, s) &= -(r - \sigma^2) X(t, s), \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \\ X(t_{n+1}, s) &= s \end{aligned} \quad (8)$$

Posons alors

$$\tilde{u}(t, s) := u(t, X^{t_{n+1}}(t, s)).$$

a) Calculer  $\partial_t \tilde{u}(t, s)$ . En déduire que (7) admet la formulation équivalente suivante à l'instant  $t = t_{n+1}$ :

$$(\partial_t \tilde{u}, v) + \tilde{a}(\tilde{u}, v) = 0, \quad \forall v \in V, \quad (9)$$

avec

$$\tilde{a}(w, v) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{S_{max}} s^2 \partial_s w \partial_s v + r \int_0^{S_{max}} w v \quad (10)$$

b) On cherche à calculer  $U^{n+1}$  à partir de  $U^n$ . On cherche maintenant  $\tilde{u}^h(t, \cdot)$  dans  $V_h$ , solution de

$$(\partial_t \tilde{u}^h, v) + \tilde{a}(\tilde{u}^h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad (11)$$

Montrer qu'un schéma de Crank Nicholson pour (9), sur l'espace  $V_h$ , peut s'écrire sous forme matricielle

$$M \frac{U^{n+1} - \tilde{U}^n}{\delta t} + \frac{1}{2} (B U^{n+1} + B \tilde{U}^n) = 0.$$

avec  $B = (B_{ij}) = (\tilde{a}(\phi_j, \phi_i))$  et  $\tilde{U}_i^n := \tilde{u}^h(t_n, s_i)$ .

c) On note  $[U^n]$  la fonction interpolée des valeurs  $U^n$  dans  $V_h$ , cad définie par  $[U^n](s) := \sum_i U_i^n \phi_i(s)$ . On considère l'approximation  $\tilde{U}_i^n = [U^n](X^{t_{n+1}}(t_n, s_i))$ .

Exprimer explicitement  $X^{t_{n+1}}(t_n, s_i)$ . En déduire une méthode de calcul des  $\tilde{U}_i^n$  à partir des  $U_i^n$ .

Préciser l'ordre de grandeur de l'erreur commise par cette approximation.

d) Citer un intérêt numérique à cette méthode.

**7. "Mass Lumping".** On remplace la matrice de masse  $M$  par la matrice diagonale  $\tilde{M} = \text{diag}(d_i)$  avec  $d_i = \sum_j M_{ij}$ . Est ce que cela change de façon significative la précision des résultats ? Quel intérêt cela peut-il avoir d'un point de vue numérique ?

