

MÉTHODES DÉTERMINISTES EN FINANCE

TP DU 21 NOVEMBRE 2011

Éléments finis pour une option Européenne à un actif.

On désire tester la méthode des éléments finis pour le calcul d'un put européen à un actif. L'équation de B&S sur un domaine tronqué $[0, S_{max}]$ est:

$$\partial_t u - \frac{\sigma^2}{2} s^2 \partial_{s,s} u - r s \partial_s u + r u = 0, \quad 0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq S_{max}, \quad (1a)$$

$$u(t, S_{max}) = u_d(t), \quad t \in (0, T) \quad (\text{Conditions aux limites}) \quad (1b)$$

$$u(0, s) = \varphi(s), \quad s \in (0, S_{max}) \quad (\text{Condition initiale}) \quad (1c)$$

On supposera que $S_{max} > K$. On veut calculer en particulier $u(T, s)$ (correspondant à une estimation du prix de l'option à la date T avant échéance).

Dans le cas de l'option put, on prend l'approximation

$$u_d(t) = 0.$$

On rappelle que la formulation variationnelle de (1a) s'écrit alors

$$\begin{cases} (\partial_t u, v) + a(u, v) = 0, & \forall v \in V_0, p.p. t \in (0, T), \\ u(0, \cdot) = \varphi \end{cases} \quad (2)$$

où

$$V_0 := \{v \in L^2(0, S_{max}), s \partial_s v \in L^2(0, S_{max}), v(S_{max}) = 0\}$$

et

$$a(w, v) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{S_{max}} s^2 \partial_s w \partial_s v + \int_0^{S_{max}} (-r + \sigma^2) s \partial_s w v + r \int_0^{S_{max}} w v \quad (3)$$

1. Télécharger le fichier `ef_Q.sce` Il s'agit d'une version similaire au programme de différences finies. Suivant la valeur du paramètre `METHODE`, il correspond à:

- `METHODE='DF'` : discrétisation par différences finies (Crank-Nicolson en temps), avec une approximation centré pour la dérivée d'ordre un en espace.
- `METHODE='EF'` : discrétisation par éléments finis (Crank-Nicolson en temps), cette partie nécessitant quelques lignes de programme à compléter.

- Vérifier que le programme fonctionne avec les paramètres `METHODE='DF'`. Tester avec $(N, I + 1) = (100, 100)$ puis $(100, 1000)$, noter les erreurs obtenues en norme L^∞

- Pour la suite mettre `METHODE='EF'`, et $N = 10, I + 1 = 10$.

L'objectif va être d'obtenir une erreur similaire à la méthode DF mais avec un nombre de points I plus faible.

2. **Discrétisation spatiale.** On introduit un maillage spatial non nécessairement régulier de $[0, S_{max}]$ avec I points intérieurs:

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_I < s_{I+1} = S_{max},$$

On note h_i les pas successifs

$$h_i := s_{i+1} - s_i, \quad 0 \leq i \leq I$$

et $h := \max_i h_i$. On note V_h l'espace des éléments finis \mathbb{P}_1 correspondant,

$$V_h := \{v \in C^0([0, S_{max}]); \forall i, v|_{[s_i, s_{i+1}]} \in \mathbb{R}_1, \text{ et } v(S_{max}) = 0\}.$$

On cherche l'approximation de Galerkin u_h de u , $u_h(t)$ dans V_h , solution de

$$\begin{cases} (\partial_t u_h, v_h) + a(u_h, v_h) = 0, & \forall v_h \in V_h, t \in [0, T], \\ u_h(0, \cdot) = \varphi_h \text{ (approximation de } \varphi \text{ dans } V_h) \end{cases} \quad (4)$$

On peut décomposer $u_h(t, \cdot)$ dans la base des éléments finis (ϕ_0, \dots, ϕ_M) correspondante:

$$u_h(t, s) := \sum_{i=0}^I u_i(t) \phi_i(s)$$

et on note $U(t)$ le vecteur colonne des composantes:

$$U(t) := \begin{pmatrix} u_0(t) \\ \vdots \\ u_I(t) \end{pmatrix}$$

On n'inclut pas u_{I+1} dans les inconnues car on prend $u_{I+1} = u_d(t) = 0$.

a) Montrer que $U : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{I+1}$ est solution de l'équation différentielle suivante:

$$M \frac{dU}{dt} + AU = 0, \quad (5)$$

$$U(0) = U^0 \quad (6)$$

où $M = (M_{ij}) := (\varphi_j, \varphi_i)$, $A = (A_{ij}) := (a(\varphi_j, \varphi_i))$, et $U^0 = (\varphi(s_i))_{0 \leq i \leq I}$.

b) Rappeler pourquoi M et A sont tridiagonales.

c) Ces matrices sont elles symétriques ?

3. a) Programmer la matrice M (voir la partie **COMPLETER M**; dans le cas r et σ constants, un formulaire est donné en annexe. On pourra le redémontrer à titre d'exercice).

b) Quelle approche générale peut-on envisager pour calculer ces matrices si $\sigma = \sigma(s)$?

c) Compléter le calcul de l'erreur L^2 (paramètre **errL2** dans fonction **plot**).

4. Discrétisation temporelle. On se donne un maillage en temps uniforme $t_n := n\delta t$ avec $\delta t := \frac{T}{N}$ et $0 \leq n \leq N$.

a) Donner un schéma de type Crank-Nicolson pour (5)-(6), à l'aide des matrices M et A .

On notera $U^n = (U_i^n)$ l'approximation obtenue à l'instant t_n .

b) Programmer ce schéma (partie **COMPLETER CN**); on complètera par la même occasion les schémas **EE** et **EI**.

5. Maillage non uniforme. On veut programmer un deuxième maillage S_0, \dots, S_{I+1} avec le même nombre de points total et $S_{I+1} = S_{max}$, mais avec plus de points au voisinage de K . Pour cela on prend $I + 1$ pair, $I_1 := \frac{I+1}{2}$,

$$S_i^1 := K \frac{\log(i)}{\log(I_1 + 1)}, \quad i = 1, \dots, I_1,$$

$$S_j^2 := S_{max} - (S_{max} - K) \frac{\log(j)}{\log(I_1 + 1)}, \quad j = I_1 + 1, \dots, I_1 + 1,$$

et on définit le nouveau maillage S_{tot} de $[0, S_{max}]$ par

$$S_{tot} = [S_1^1, \dots, S_{I_1}^1, S_{I_1+1}^2, S_{I_1+1}^2, \dots, S_1^2].$$

a) Tester le programme en prenant `MAILLAGE='UNIFORM'` ou `MAILLAGE='LOG'` suivant qu'on veuille un maillage uniforme ou logarithmique. Comparer la précision des méthodes EF et DF pour un même nombre de mailles I (ex: $I + 1 = 100$, $N = 100$): quel gain en précision observe-t-on, en norme L^∞ ?

b) Le schéma vérifie-t-il le principe du maximum ($\min_j(U_j^n) \leq U_i^{n+1} \leq \max_j(U_j^n)$) ?

6. Méthode des caractéristiques. On propose une autre méthode de discrétisation de la dérivée première $\partial_s u$ dans (1a). On note d'abord que (1a) s'écrit aussi:

$$\partial_t u - (r - \sigma^2) s \partial_s u - \frac{\sigma^2}{2} \partial_s (s^2 \partial_s u) + r u = 0. \quad (7)$$

Entre les instants t_n et t_{n+1} , définissons pour chaque $s \geq 0$ la fonction "caractéristique" notée $X(t, s) = X^{t_{n+1}}(t, s)$, solution de l'équation différentielle en temps:

$$\begin{aligned} \partial_t X(t, s) &= -(r - \sigma^2) X(t, s), \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \\ X(t_{n+1}, s) &= s \end{aligned} \quad (8)$$

Posons alors

$$\tilde{u}(t, s) := u(t, X^{t_{n+1}}(t, s)).$$

a) Calculer $\partial_t \tilde{u}(t, s)$. En déduire que (7) admet la formulation équivalente suivante à l'instant $t = t_{n+1}$:

$$(\partial_t \tilde{u}, v) + \tilde{a}(\tilde{u}, v) = 0, \quad \forall v \in V, \quad (9)$$

avec

$$\tilde{a}(w, v) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{S_{max}} s^2 \partial_s w \partial_s v + r \int_0^{S_{max}} w v \quad (10)$$

b) On cherche à calculer U^{n+1} à partir de U^n . On cherche maintenant $\tilde{u}^h(t, \cdot)$ dans V_h , solution de

$$(\partial_t \tilde{u}^h, v) + \tilde{a}(\tilde{u}^h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad (11)$$

Montrer qu'un schéma de Crank Nicholson pour (9), sur l'espace V_h , peut s'écrire sous forme matricielle

$$M \frac{U^{n+1} - \tilde{U}^n}{\delta t} + \frac{1}{2} (B U^{n+1} + B \tilde{U}^n) = 0.$$

avec $B = (B_{ij}) = (\tilde{a}(\phi_j, \phi_i))$ et $\tilde{U}_i^n := \tilde{u}^h(t_n, s_i)$.

c) On note $[U^n]$ la fonction interpolée des valeurs U^n dans V_h , cad définie par $[U^n](s) := \sum_i U_i^n \phi_i(s)$. On considère l'approximation $\tilde{U}_i^n = [U^n](X^{t_{n+1}}(t_n, s_i))$.

Exprimer explicitement $X^{t_{n+1}}(t_n, s_i)$. En déduire une méthode de calcul des \tilde{U}_i^n à partir des U_i^n .

Préciser l'ordre de grandeur de l'erreur commise par cette approximation.

d) Citer un intérêt numérique à cette méthode (on pourra programmer la méthode à titre d'exercice).

7. "Mass Lumping". On remplace la matrice de masse M par la matrice diagonale $\tilde{M} = \text{diag}(d_i)$ avec $d_i = \sum_j M_{ij}$. Est ce que cela change de façon significative la précision des résultats ? Quel intérêt cela peut-il avoir d'un point de vue numérique ?

