Méthodes Déterministes en Finance

Problème - 22 Février 2007

Durée: 2 heures.

Les notes de cours manuscrites sont autorisées. Les questions pourront être traitées indépendament les unes des autres.

On considère l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black et Scholes pour le prix d'une option noté $u(t, x, y)$, à deux actifs, de payoff φ, avec $0 \leq t \leq T$ et $x, y \geq 0$:

$$\partial_t u - \frac{1}{2}\sigma_1^2 x^2 \partial_{xx} u - \rho\sigma_1\sigma_2 xy\partial_{xy} u - \frac{1}{2}\sigma_2^2 y^2 \partial_{yy} u - rx\partial_x u - ry\partial_y u + ru = 0, \quad \text{(1a)}$$

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad \text{(1b)}$$

(équation obtenue après renversement du temps: $t \leftarrow T - t$), où $\sigma_1, \sigma_2, r > 0$, et $\rho \in [-1, 1]$ sont des constantes. On rappelle que pour des conditions initiales φ suffisamment régulières, l'EDP (1) admet une unique solution.

Partie A : Analyse de (1)

1) Que représente le coefficient ρ ?
2) Par des arguments d'EDP, expliquer pourquoi l'EDP (1) peut se ramener à la résolution d'un problème en dimension 1 en espace (dimension 2 si on tient compte de la variable t) dans les cas suivant:

1. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\rho = 0$, $\varphi(x, y) = (K_1 - x)_+ + (K_2 - y)_+$.
2. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\rho = 1$, $\varphi(x, y) = (K - x - y)_+$.

3) Par des arguments d'EDP, établir que la relation de parité put-call est $P(t, x, y) - C(t, x, y) = Ke^{-rt} - x - y$, où P (resp. C) est le prix dans le cas du payoff $\varphi(x, y) = (K - x - y)_+$ (resp. $\varphi(x, y) = (x + y - K)_+$).
4) On considère les nouvelles variables $X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$ et la nouvelle inconnue $v(t, X, Y) = u(t, x, y)$. Montrer que l'EDP (1) sur u s'écrit de manière équivalente pour v: pour $0 \leq t \leq T$ et $X, Y \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t v - (a\partial_{XX} v + b\partial_{YY} v + 2c\partial_{XY} v) - d\partial_X v - e\partial_Y v + rv = 0, \quad \text{(2a)}$$

$$v(0, X, Y) = v_0(X, Y) = \varphi(e^X, e^Y), \quad \text{(2b)}$$

où a, b, c, d, e sont des constantes dont on précisera les expressions en fonction des données du problème. Vérifier en particulier que

$$a, b \geq 0 \text{ et que } c^2 \leq ab.$$

Partie B : Discrétisation de (2)

Dans toute la suite, et sauf indication contraire, on supposera que

$$\varphi(x, y) = (K - x - y)_+.$$

Soit m et M deux constantes telles que $0 < m < K < M$. On s'intéresse au problème (1) posé sur le domaine tronqué $\Omega := [m, M] \times [m, M]$. On définit les bords γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4 par

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= \{M\} \times [m, M], \\ \gamma_2 &:= [m, M] \times \{M\}, \\ \gamma_3 &:= \{m\} \times [m, M], \\ \gamma_4 &:= [m, M] \times \{m\}. \end{aligned}$$

5) Conditions aux limites pour (1)
5.a) On suppose $\varphi(x, y) = (K - x - y)_+$. Proposer des conditions aux limites sur les bords γ_1 et γ_2.
5.b) Dans le cas où $\varphi(x, y) = (K - \min(x, y))_+$, quelle type de conditions aux limites pourrait-on proposer sur les bords γ_1 et γ_2 ?
5.c) On suppose que m est choisi strictement positif, très petit, et on considère à nouveau le cas de $\varphi(x, y) = (K - x - y)_+$. Proposer une condition aux limites sur les bords γ_3 et γ_4. *(Indication: on pourra utiliser la valeur supposée connue de la formule de Black et Scholes donnant le prix $P^{bs}(t, x, k, r, \sigma)$ d'un put européen à un actif, pour un taux $r > 0$, une volatilité $\sigma > 0$ et un strike $k > 0$ fixé.)*
5.d) Déduire de ce qui précède des conditions aux limites sur les bords $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ pour (2) posé sur le domaine tronqué $\Theta := [p, P] \times [p, P]$ avec $p = \log(m)$, $P = \log(M)$. Les bords sont définis par :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &:= \{P\} \times [p, P], \\ \Gamma_2 &:= [p, P] \times \{P\}, \\ \Gamma_3 &:= \{p\} \times [p, P], \\ \Gamma_4 &:= [p, P] \times \{p\}. \end{aligned}$$

Dans la suite, on notera ces conditions aux limites de la manière suivante :

$$\begin{cases} v(t, X, p) = v_b(t, X), & \forall X \in [p, P], \\ v(t, X, P) = v_h(t, X), & \forall X \in [p, P], \\ v(t, p, Y) = v_g(t, Y), & \forall Y \in [p, P], \\ v(t, P, Y) = v_d(t, Y), & \forall Y \in [p, P]. \end{cases} \tag{3}$$

On cherche à écrire un schéma aux différences finies pour (2)-(3). On suppose pour l'instant que

$$c = 0.$$

On introduit le maillage $X_i = p + ih_X$, $i = 0, \ldots, (I+1)$, avec $h_X = \frac{P-p}{I+1}$, et $Y_j = p + jh_Y$, $j = 0, \ldots, (J+1)$ avec $h_Y = \frac{P-p}{J+1}$. On suppose pour simplifier que $h = h_X = h_Y$, et donc $I = J$. On notera aussi

$$M = I^2.$$

On définit :

$$\begin{aligned} S_{i,j}^{\delta t, h}(V^n, V^{n+1}) \quad = \quad & \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\delta t} + a\frac{-V_{i-1,j}^{n+1} + 2V_{i,j}^{n+1} - V_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} + b\frac{-V_{i,j-1}^{n+1} + 2V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} \\ & -d\frac{V_{i+1,j}^{n+1} - V_{i-1,j}^{n+1}}{2h} - e\frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{2h} + rV_{i,j}^{n+1}. \end{aligned}$$

On considère le schéma suivant: pour $n = 0, \dots, N-1$, $1 \le i, j \le I$:

$$S_{i,j}^{\delta t,h}(V^n, V^{n+1}) = 0 \tag{4}$$

avec

$$\begin{aligned}
V_{i,0}^{n+1} &= v_b(t_{n+1}, X_i),\\
V_{i,I+1}^{n+1} &= v_h(t_{n+1}, X_i),\\
V_{0,j}^{n+1} &= v_g(t_{n+1}, Y_j),\\
V_{I+1,j}^{n+1} &= v_d(t_{n+1}, Y_j),
\end{aligned}$$

et pour $n = 0$:

$$V_{i,j}^0 = v_0(X_i, Y_j), \quad 1 \le i, j \le I.$$

6) Mise sous forme vectorielle. On associe à une matrice $V = (V_{i,j})_{1 \le i,j \le I}$ le vecteur de $\mathbb{R}^M$ défini par

$$\overline{V} = \begin{pmatrix} V_{.,1} \\ V_{.,2} \\ \vdots \\ V_{.,I} \end{pmatrix}.$$

(où $V_{.,j}$ designe le vecteur colonne de $\mathbb{R}^I$ de composantes $(V_{i,j})_{1 \le i \le I}$).
6.a) Montrer que le schéma (4) peut s'écrire sous forme vectorielle

$$\frac{\overline{V}^{n+1} - \overline{V}^n}{\delta t} + A\overline{V}^{n+1} + B\overline{V}^{n+1} + F_n = 0 \tag{5}$$

où A, B sont des matrices de $\mathbb{R}^{M \times M}$, qui s'écrivent par bloc:

$$A = \begin{bmatrix} A_d & 0 & & & 0 \\ 0 & A_d & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & A_d & 0 \\ 0 & & & 0 & A_d \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_d & B_u & & & 0 \\ B_\ell & B_d & B_u & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B_\ell & B_d & B_u \\ 0 & & & B_\ell & B_d \end{bmatrix}, \tag{6}$$

avec A_d, matrice tridiagonale de $\mathbb{R}^{I \times I}$ que l'on précisera sachant qu'elle ne dépend que de a et d, et B_d, B_u, B_ℓ matrices diagonales de $\mathbb{R}^{I \times I}$ que l'on précisera sachant que B_d ne dépend que de b et r, et B_u, B_ℓ ne dépendent que de b et e. Dans (5), F_n est un vecteur de $\mathbb{R}^M$ dépendant des conditions aux limites v_b, v_h, v_g, v_d et indépendant de V^n et V^{n+1}, dont *on ne demande pas* l'expression exacte.
6.b) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, M\}$,

$$A_{kk} - \sum_{\ell \ne k} |A_{k\ell}| \ge \frac{2a}{h^2} - \left|\frac{a}{h^2} - \frac{d}{2h}\right| - \left(\frac{a}{h^2} + \frac{d}{2h}\right),$$

et de même

$$B_{kk} - \sum_{\ell \ne k} |B_{k\ell}| \ge r + \frac{2b}{h^2} - \left|\frac{b}{h^2} - \frac{e}{2h}\right| - \left(\frac{b}{h^2} + \frac{e}{2h}\right).$$

7) On définit l'erreur de consistance par

$$\epsilon_{i,j}^n := S_{i,j}^{\delta t,h}(W^n, W^{n+1})$$

où $W_{i,j}^n := v(t_n, X_i, Y_j)$ et où v est la solution exacte de (2)-(3). On rappelle que le schéma est dit consistant d'ordre q (en temps) et r (en espace) si, lorsque v est suffisament régulière, quand $\delta t, h \to 0$,

$$|\epsilon_{i,j}^n| \le C(\delta t^q + h^r),$$

où C est une constante indépendante de $\delta t, h$.

7.a) Quels sont les ordres de consistance du schéma en temps et en espace ? Préciser l'hypothèse de régularité sur v qui est faite pour obtenir ces ordres. *(On ne demande pas de traiter en détail le cas des points au bord du domaine.)*

7.b) Notons $E_{i,j}^n = W_{i,j}^n - V_{i,j}^n$. Montrer que, sous une hypothèse sur h que l'on précisera, le schéma vérifie:

$$||E^{n+1}||_\infty \le ||E^n||_\infty + \delta t||\epsilon^n||_\infty.$$

Comment modifier le schéma pour obtenir un résultat analogue sans hypothèse sur h ?

7.c) En déduire un résultat de convergence du schéma.

8) On admet que le coût numérique de résolution d'un système linéaire de la forme $Q\alpha = \beta$, lorsque Q est une matrice de taille $n \times n$ et p-bande (c'est à dire $|i-j| > p \Rightarrow Q_{i,j} = 0$), est de l'ordre de $O(p^2 n)$ opérations élémentaires [1].

Montrer que le calcul de V^{n+1} à partir de V^n pour le schéma (4) implique un coût numérique de l'ordre de M^2.

9) On désire réduire le coût numérique précédent.

9.a) On considère le schéma numérique suivant:

$$\begin{aligned}
\frac{V_{i,j}^{n,(1)} - V_{i,j}^n}{\delta t} + a\frac{-V_{i-1,j}^{n,(1)} + 2V_{i,j}^{n,(1)} - V_{i+1,j}^{n,(1)}}{h^2} - d\frac{V_{i+1,j}^{n,(1)} - V_{i-1,j}^{n,(1)}}{2h} &= 0, \quad (7a)\\
\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n,(1)}}{\delta t} + b\frac{-V_{i,j-1}^{n+1} + 2V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} - e\frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{2h} + rV_{i,j}^{n+1} &= 0. \quad (7b)
\end{aligned}$$

En utilisant les notations de la question **6)**, vérifier qu'on peut réécrire ce nouveau schéma sous la forme vectorielle suivante:

$$\frac{\overline{V}^{n,(1)} - \overline{V}^n}{\delta t} + A\overline{V}^{n,(1)} + F_{A,n} = 0, \tag{8a}$$

$$\frac{\overline{V}^{n+1} - \overline{V}^{n,(1)}}{\delta t} + B\overline{V}^{n+1} + F_{B,n} = 0, \tag{8b}$$

où A et B sont les matrices précédemment définies (cf. (6)) et $F_{A,n}$ et $F_{B,n}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^M$ qui s'expriment uniquement en fonction des données aux bord, et qu'on ne cherchera pas à expliciter.

9.b) On note **Id** la matrice identité de $\mathbb{R}^M$. Montrer que la résolution d'un système linéaire de type $(\mathbf{Id} + \delta t A)V = \beta$ (d'inconnue V) peut se ramener à la résolution de I systèmes linéaires de taille $I \times I$ tridiagonaux. Montrer un résultat analogue pour un

[1] C'est par exemple le cas avec une méthode de décomposition LU de Q.

système linéaire de type $(\mathbf{Id} + \delta t B)V = \beta$. En déduire qu'avec le schéma (7), le coût de calcul de V^{n+1} à partir de V^n est de l'ordre de $O(M)$.

9.c) Montrer que

$$\frac{\overline{V}^{n+1} - \overline{V}^n}{\delta t} + A\overline{V}^{n+1} + B\overline{V}^{n+1} + \delta t AB\overline{V}^{n+1} + G_n = 0,$$

où G_n est un vecteur de $\mathbb{R}^M$ dont on donnera l'expression en fonction de $F_{A,n}$ et $F_{B,n}$.

9.d) On s'intéresse maintenant à l'erreur de consistance du schéma (7). Si $W^n_{i,j} = v(t_n, x_i, y_j)$, montrer que $||AB\overline{W}^{n+1}||_\infty$ est bornée par une constante indépendante de h et δt. Préciser l'hypothèse de régularité sur v utilisée. *(Indication: on pourra commencer par écrire (en le justifiant):*

$$\left(B\overline{W}^{n+1}\right)_{i,j} = -b\partial_{YY}v(t_{n+1}, X_i, Y_j) - e\partial_Y v(t_{n+1}, X_i, Y_j) + rv(t_{n+1}, X_i, Y_j) + h^2 R^n_{i,j},$$

où $R^n_{i,j}$ est majoré (uniformément en i, j et n) par une constante dépendant de normes L^∞ de dérivées de v à préciser.)

On définit l'erreur de consistance par

$$\epsilon^n := \frac{\overline{W}^{n+1} - \overline{W}^n}{\delta t} + A\overline{W}^{n+1} + B\overline{W}^{n+1} + \delta t AB\overline{W}^{n+1} + G_n.$$

Montrer que le schéma est consistant, et préciser les ordres en temps et en espace. *(On ne demande pas de traiter en détail le cas des points au bord du domaine.)*

9.e) Montrer que l'erreur $\overline{E}^n = \overline{W}^n - \overline{V}^n$ vérifie

$$(\mathbf{Id} + \delta t A)(\mathbf{Id} + \delta t B)\overline{E}^{n+1} = \overline{E}^n + \delta t \overline{\epsilon}^n.$$

Montrer (sous une hypothèse sur h) la stabilité du schéma en norme L^∞, et en déduire la convergence du schéma.

9.f) Donner en le justifiant très sommairement un résultat de convergence en norme L^2.

10) On considère maintenant le cas $c \neq 0$. On supposera $c > 0$, le cas $c < 0$ étant analogue.

10.a) Montrer que pour une fonction v suffisamment régulière

$$\left(\frac{v(X_i + h, Y_j + h) - 2v(X_i, Y_j) + v(X_i - h, Y_j - h)}{h^2}\right) = (2\partial_{XY}v + \partial_{XX}v + \partial_{YY}v)(X_i, Y_j) + O(h^2).$$

10.b) En écrivant

$$(a\partial_{XX}v + b\partial_{YY}v + 2c\partial_{XY}v) = c\,(\partial_{XX}v + \partial_{YY}v + 2\partial_{XY}v) + ((a-c)\partial_{XX}v + (b-c)\partial_{YY}v)\,,$$

en déduire un schéma implicite et stable en norme L^∞ pour (2) dans le cas où

$$0 < c \leq \min(a, b). \tag{9}$$

10.c) En s'inspirant de la question **9)**, proposer un schéma qui est d'ordre 1 en temps et 2 en espace, stable (en norme L^2, ou en norme L^∞ sous une éventuelle condition sur h qu'on précisera), et tel que le coût de chaque itération en temps est en $O(M)$.

10.d) Dans le cas où $|c|^2 \leq ab$ mais où (9) n'est plus satisfaite, quelle autre approche numérique peut-t-on suggérer pour discrétiser (2) ? Quels seraient les avantages par rapport à l'approche proposée ci-dessus ?