Méthodes Déterministes en Finance

Problème - 19 Février 2008

Durée: 2 heures.

Les notes de cours manuscrites sont autorisées. Les questions pourront être traitées indépendamment les unes des autres.

Dans un marché financier, on considère un portefeuille de couverture constitué d'un actif sans risque S^0 et d'un actif risqué $S(t)$ évoluant respectivement suivant $dS^0(t) = S^0(t)rdt$ et

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t),$$

où $r > 0$ désigne le taux d'intérêt et $\sigma > 0$ la volatilité. Notons $Y(t)$ la part d'actif risqué à l'instant t et $u(t, S(t))$ la valeur de l'option considérée. Dans le modèle de Black et Scholes, la stratégie de couverture classique consiste à prendre $Y(t) = \frac{\partial u}{\partial s}(t, S(t))$. En pratique les contraintes du marché font que cette stratégie optimale n'est pas toujours possible. On examine ici un modèle où l'on impose une contrainte sur les variations de Y. Plus précisement, on se donne une fonction $\Gamma_0(t,s) > 0$ continue, strictement positive, et on considère la contrainte dépendante du temps:

$$s\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(t,s) \leq \Gamma_0(t,s), \quad s > 0,\ t \in [0,T[. \tag{1}$$

On dit alors que la fonction $s \to u(t,s)$ est Γ_0-concave.

En présence d'une telle contrainte, le prix u de l'option peut être modélisé par la solution d'une équation aux dérivées partielles:

$$\min\left(-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - rs\frac{\partial u}{\partial s} + ru,\ \Gamma_0 - s\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) = 0, \quad t \in [0,T[,\ s \geq 0, \tag{2}$$

avec la condition terminale

$$u(T,s) = \hat{\varphi}(s). \tag{3}$$

En $s = 0$, on supposera la contrainte non active et donc uniquement

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(t,0) + ru(t,0) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

La fonction $\hat{\varphi}$ est elle-même définie comme solution de l'équation

$$\min\left(\hat{\varphi}(s) - \varphi(s), \Gamma_0(T,s) - s\frac{d^2\hat{\varphi}}{ds^2}\right) = 0, \quad s \geq 0. \tag{5}$$

$$\hat{\varphi}(0) = K, \tag{6}$$

$$\lim_{s\to\infty} \hat{\varphi}(s) = 0, \tag{7}$$

où φ est la fonction de payoff. Sauf indication contraire, on notera K une constante strictement positive, et la fonction payoff est définie par:

$$\varphi(s) = (K - s)_+ = \max(K - s, 0), \quad s > 0. \tag{8}$$

On supposera en outre que:

- Il existe une et une seule solution de (2)-(3)-(4) et vérifiant $\lim_{s\to\infty} u(t,s) = 0$, $\forall t \in [0, T[$.
- On a le *principe de comparaison* pour l'équation sur ϕ suivante:

$$\min\left(\phi - \varphi, f - s\frac{d^2\phi}{ds^2}\right) = 0,$$

 où $(f(s))_{s\geq 0}$ est une fonction continue quelconque fixée; cela signifie que si ϕ est une sous-solution, et ψ une sur-solution, au sens où ϕ et ψ sont de classe C^2 et vérifient pour tout $s \geq 0$:

$$\min\left(\phi(s) - \varphi(s), f(s) - s\frac{d^2\phi}{ds^2}(s)\right) \leq 0, \quad \min\left(\psi(s) - \varphi(s), f(s) - s\frac{d^2\psi}{ds^2}(s)\right) \geq 0,$$

 et avec $\phi(0) = \psi(0) = K$ et $\lim_{s\to\infty}\phi(s) = \lim_{s\to\infty}\psi(s) = 0$, alors on a pour tout $s \geq 0$:

$$\phi(s) \leq \psi(s).$$

Si $X = (x_j), Y = (y_j)$ sont deux vecteurs (colonnes) de $\mathbb{R}^I$ on notera $X \leq Y$ si $x_j \leq y_j$ pour tout $j = 1, \ldots, I$. On notera de même $X \geq 0$ lorsque $x_j \geq 0$, $\forall j$, et $\min(X, Y)$ le vecteur de composantes $(\min(x_i, y_i))$.

Enfin on dira que $B \in \mathbb{R}^{I\times I}$ est une M-matrice de coefficient $\delta > 0$ si

$$\begin{aligned} &(i) \quad B_{ii} \geq 0, \ \forall i \\ &(ii) \quad B_{ij} \leq 0, \forall i \neq j, \\ &(iii) \quad B_{ii} \geq \delta + \sum_{j\neq i} |B_{ij}|, \ \forall i. \end{aligned}$$

On dira que $B \in \mathbb{R}^{I\times I}$ est une matrice *monotone* si

$$\forall X \in \mathbb{R}^I, \quad BX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0. \tag{9}$$

On rappelle qu'une M-matrice de coefficient $\delta > 0$ vérifie $||B^{-1}||_\infty \leq \frac{1}{\delta}$ (pour la norme subordonnée à la norme vectorielle $|.|_\infty$), et qu'elle est monotone.

Partie I.

I.1(i) Ecrire le système d'EDP (2')-(3')-(4') correspondant aux équations (2)-(3)-(4), vérifié par la fonction

$$v(t, s) = u(T - t, s),$$

en fonction des données du problème et de la fonction $\Gamma(t,s) = \Gamma_0(T-t,s)$.
(ii) Calculer explicitement la valeur de $v(t,0)$.

I.2 (i) Dans le cas d'un payoff $\varphi(s) = (K-s)_+$ (put) et si on cherche une approximation de u sur le domaine $[0, s_{\max}]$ avec $s_{\max}$ grand, proposer une condition aux limites en $s = s_{\max}$ raisonnable (on ne demande pas de justifier en détail).
(ii) Même question dans le cas d'un payoff $\varphi(s) = (s-K)_+$ (call).

I.3 Montrer qu'il existe au plus une fonction $\hat\varphi$ de classe C^2, solution de (5)-(6)-(7) (On pourra utiliser le principe de comparaison).

Dans la suite de la partie **I**, on suppose que φ est Γ-concave, et que $\underline{\Gamma \text{ est une constante}}$ (indépendante de t et de s), avec $\Gamma > 0$. On suppose en outre que $\varphi(0) = K$ et $\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = 0$.

I.4 Montrer que $\hat\varphi = \varphi$.

I.5 On considère w la solution de :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - rs\frac{\partial w}{\partial s} + rw = 0, \quad s > 0, t \in]0,T], \tag{10a}$$

$$w(0,s) = \varphi(s), \quad s > 0. \tag{10b}$$

Montrer que si φ est Γ-concave, alors $s \to w(t,s)$ est aussi Γ-concave pour tout $t > 0$. (*Indication*: on pourra introduire la fonction $h(t,s) = \Gamma - s\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(t,s)$, calculer $\partial_t h - \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} - (r+\sigma^2)s\frac{\partial h}{\partial s}$ en supposant w assez régulière).

I.6 En déduire que w, solution de (10a)-(10b) est aussi solution de (2')-(3'). Construire une solution de (2')-(3') dans le cas où φ n'est pas Γ-concave.

I.7 Un schéma implicite. On considère le schéma numérique suivant pour l'approximation de (10) par des (V_j^n): on initialise avec $V_j^0 = \varphi(s_j)$, puis pour pour $n = 0, \ldots, N-1$ on calcule V^{n+1} à partir de V^n, solution de:

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\delta t} - \frac{\sigma^2}{2}s_j^2 \frac{V_{j-1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j+1}^{n+1}}{h^2} \tag{11}$$

$$-rs_j\frac{V_{j+1}^{n+1} - V_j^{n+1}}{h} + rV_j^{n+1} = 0, \quad j = 1, \ldots, I, \tag{12}$$

et vérifiant $V_{I+1}^{n+1} = 0$ et $V_0^{n+1} = Ke^{-rt_{n+1}}$.
a) On note V^n le vecteur colonne $[V_1^n, \ldots, V_I^n]$. Expliciter une matrice A, tridiagonale, indépendante de V^{n+1}, et un vecteur $q(t)$, de sorte que le schéma s'écrive:

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\delta t} + AV^{n+1} + q(t_{n+1}) = 0.$$

On exprimera les coefficients de A et de $q(t)$ en fonction de r, t, K et des coefficients

$$a_j = \frac{\sigma^2}{2}\frac{s_j^2}{h^2}, \quad b_j := r\frac{s_j}{h}.$$

b) On note
$$B = I + \delta t A.$$
Montrer que $||B^{-1}||_\infty \leq 1$.
c) Quel est l'ordre de consistance en espace et en temps du schéma ? Enoncer un résultat de convergence du schéma.
d) Proposer un schéma numérique plus précis en temps et en espace.

Partie II.

Dans cette partie on s'intéresse à un schéma d'approximation de $\hat{\varphi}$ solution de (5)-(6)-(7). On note $f(s) = \frac{\Gamma_0(T,s)}{s}$ pour $s > 0$.

Pour des raisons numériques on introduit un paramètre $s_{\max}$ t.q. $s_{\max} > K$, et on cherche $\hat{\varphi} : [0, s_{\max}] \to \mathbb{R}$, solution de

$$\min\left(\hat{\varphi}(s) - \varphi(s), f(s) - \frac{d^2\hat{\varphi}}{ds^2}\right) = 0, \quad s \in (0, s_{\max}), \tag{13}$$
$$\hat{\varphi}(0) = K, \quad \hat{\varphi}(s_{\max}) = 0. \tag{14}$$

On considère un entier $I \geq 1$, le pas $h = \frac{s_{\max}}{I+1}$, et $s_j = jh$ pour $j = 0, \ldots, I+1$. On note $U = (U_1, \ldots, U_I)^T \in \mathbb{R}^I$ et considère le système suivant:

$$\begin{aligned} &\min\left(U_j - g_j,\ f_j + \frac{-U_{j-1} + 2U_j - U_{j+1}}{h^2}\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, I, \\ &U_0 = K, \quad U_{I+1} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

avec $g_j = \varphi(s_j)$ et $f_j = f(s_j)$.

II.1 Justifier pourquoi (13) correspond bien au problème initial (5) pour $s \in (0, s_{\max})$, puis montrer que (15) s'écrit

$$\min(U - g, DU - d) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^I$$

où D et d sont respectivement une matrice de $\mathbb{R}^{I\times I}$ et un vecteur de $\mathbb{R}^I$ qu'on précisera en fonction des des (f_j), de h et de K.

II.2 Pour $x \in \mathbb{R}^I$, on pose $F(x) = \min(x - g,\ Dx - d)$. Pour tout $\alpha \in \{0,1\}^I$, on définit $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{I\times I}$ et $b(\alpha) \in \mathbb{R}^I$ par:

$$B_{ij}(\alpha) = \begin{cases} \delta_{i,j} \text{ si } \alpha_i = 0 \\ D_{i,j} \text{ si } \alpha_i = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_i(\alpha) = \begin{cases} g_i \text{ si } \alpha_i = 0 \\ d_i \text{ si } \alpha_i = 1 \end{cases}$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker: $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

(i) Montrer que F vérifie

$$F(x) = \min_{\alpha \in \{0,1\}^I} \Big(B(\alpha)x - b(\alpha)\Big).$$

(*ii*) Montrer que pour tout α, $B(\alpha)$ est monotone au sens (9). *Indication*: Etant donné $x \in \mathbb{R}^I$ t.q. $(Bx) \geq 0$, introduire i_0 t.q. $x_{i_0} = m = \min_j(x_j)$. Distinguer les cas $\alpha_{i_0} = 0$ et $\alpha_{i_0} = 1$. Dans le cas $\alpha_{i_0} = 1$, on pourra définir $i_1 =: \min\{k \leq i_0,\ \forall l \in \{k, \ldots, i_0\},\ \alpha_l = 1\}$ et $j_1 =: \max\{k \geq i_0,\ \forall l \in \{i_0, \ldots, k\}, \alpha_l = 1\}$, et utiliser (après l'avoir demontré) que $x_i = m$ pour tout $i \in \{\max(i_1 - 1, 1), \ldots, \min(j_1 + 1, I)\}$.
(*iii*) En déduire qu'il existe au plus une solution de $F(x) = 0$.

II.3 Pour $x \in \mathbb{R}^I$, on définit la matrice $G(x)$ par

$$G_{i,j}(x) = \begin{cases} \delta_{ij} \text{ si } (x-g)_i < (Dx-d)_i \\ D_{ij} \text{ si } (x-g)_i \geq (Dx-d)_i \end{cases}.$$

On définit l'algorithme itératif **(A-1)** suivant:

$$\textbf{(A-1)} \qquad \begin{array}{l} x^0 = g. \text{ Puis pour } k \geq 0: \\ x^{k+1} = x^k - G(x^k)^{-1} \cdot F(x^k) \end{array}. \tag{16}$$

(*i*) Justifier le fait que $\forall x \in \mathbb{R}^I$, $G(x)$ est inversible.
(*ii*) L'algorithme est-il convergent ? Que dire sur le nombre d'itérations ?
(*iii*) Estimer le coût numérique de la résolution du système $G(x)V = b$ pour x, b, V donnés. (On pourra donner un majorant du nombre d'opérations élémentaires en fonction de la taille I du problème, lorsque I est grand).

II.4 On note $(U_j^h) = (U_j)$ la dépendance par rapport au pas h du maillage. On suppose désormais que la fonction $(t,s) \to \frac{\Gamma(t,s)}{s}$ se prolonge continuement jusqu'en $s = 0$. En particulier, on supposera que

$$\exists C_0 \geq 0, \quad \Gamma(t,s) \leq C_0 s, \quad \forall s \in (0, s_{\max}). \tag{17}$$

On désire montrer que le schéma (15) est stable au sens suivant: il existe une constante C_1 indépendante de h, t.q.

$$|U_j^h| \leq C_1, \quad \forall j = 0, \ldots, I.$$

On pourra admettre le résultat suivant pour la matrice D (valable quelque soit la dimension I du système):

$$||D^{-1}||_\infty \leq \frac{s_{\max}^2}{8}.$$

On considère $1 \leq p \leq q \leq I$, et le système d'équations

$$\begin{cases} v_{p-1} = a, \\ \frac{1}{h^2}(-v_{j-1} + 2v_j - v_{j+1}) = -f_j, \quad j = p, \ldots, q, \\ v_{q+1} = b. \end{cases} \tag{18}$$

(*i*) Dans le cas $a = b = 0$, montrer que

$$\max_{j=p,\ldots,q} |v_j| \leq \frac{1}{8} s_{\max}^2 \max_{j=p,\ldots,q} |f_j|.$$

(ii) En déduire pour a, b quelconques:

$$\max_{j=p,\ldots,q} |v_j| \leq \max(|a|,|b|) + \frac{1}{8}s_{\max}^2 \max_{j=p,\ldots,q} |f_j|.$$

(*Indication*: on pourra introduire $w_j = a + (j-p+1)h'$ où $h' = (b-a)/(q-p+2)$.)
(iii) Montrer que

$$||U^h||_\infty \leq \max_{j=0,\ldots,I+1} |g_j| + \frac{1}{8}s_{\max}^2 \max_{j=1,\ldots,I} |f_j|.$$

(On pourra utiliser que $U = U^h$ est solution de $B(\alpha)U = b(\alpha)$ pour un $\alpha \in \{0,1\}^I$.) Conclure à la stabilité en donnant une constante C_1 explicite.

II.5 On note

$$H(s,\psi) := \min\left(\psi(s) - \varphi(s), f(s) - \frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}(s)\right).$$

Pour $s, u \in \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, on pose:

$$S_h(s,u,\psi) = \min\left(u - \varphi(s), f(s) + \frac{-\psi(s-h) + 2u - \psi(s+h)}{h^2}\right). \tag{19}$$

(i) Montrer que le schéma (15) s'écrit

$$\begin{cases} S_h(s_j, U_j, [(U_k)_k]) = 0, \quad j = 1,\ldots,I, \\ U_0 = K, \quad U_{I+1} = 0 \end{cases}$$

(où $u_h = [(U_k)]$ désigne la fonction continue, affine sur tous les $[s_j, s_{j+1}]$ et t.q. $u_h(s_j) = U_j$).
(ii) Montrer que pour toute fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^2, on a

$$\lim_{s_j \to s,\ (h,\xi)\to 0} S_h\left(s_j, \psi(s_j) + \xi, [(\psi+\xi)_k]\right) = H(s,\psi),\ \forall s \in (0, s_{\max}).$$

II.6 Montrer que le schéma est monotone au sens suivant: $\forall s \in \mathbb{R}^+, u \in \mathbb{R}, \forall \phi, \psi$ (fonctions C^2), on a

$$\phi \leq \psi \quad \Rightarrow \quad S_h(s,u,\phi) \geq S_h(s,u,\psi).$$

II.7 Enoncer brièvement un résultat de convergence, en précisant les hypothèses utilisées.

Partie III.

On désire maintenant discrétiser l'équation d'évolution (2')-(3'). On fixe à nouveau $s_{\max} > K$ et on introduit la condition aux limites

$$v(t, s_{\max}) = 0, \quad t \in [0,T].$$

On se donne un entier $N \geq 1$, un pas $\delta t = T/N$, et on pose $t_n = n\delta t$. Posons

$$v_g(t) = Ke^{-rt}.$$

On considère le schéma **(S-1)** suivant: $U^0 = g$, puis pour $n = 0, \ldots, N-1$ on calcule U^{n+1} à partir de U^n, solution de:

$$\min\left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\delta t} + AU^n + q(t_n),\ DU^{n+1} - d(t_{n+1})\right) = 0$$

avec $d(t) := \left(-\frac{\Gamma(t,s_1)}{s_1} + \frac{1}{h^2}v_g(t), -\frac{\Gamma(t,s_2)}{s_2}, \ldots, -\frac{\Gamma(t,s_I)}{s_I}\right)^T$, et $U^0 = g$. On notera que le calcul de U^{n+1} en fonction de U^n n'est pas trivial ici.

III.1 (i) Montrer que **(S-1)** est équivalent à

$$\min\Big(U^{n+1} - ((I - \delta tA)U^n - \delta tq(t_n)),\ DU^{n+1} - d(t_{n+1})\Big) = 0.$$

(ii) Proposer une méthode de calcul de U^{n+1} connaissant U^n.

(iii) Montrer qu'on peut avoir

$$||I - \delta tA||_\infty > 1$$

même pour δt et h très petits.

Ceci étant source d'instabilité du schéma, on propose maintenant un autre schéma noté **(S-2)**: On initialise avec $U^0 = g$, puis pour $n = 0, \ldots, N-1$ on désire calculer U^{n+1} à partir de U^n, tel que:

$$\textbf{(S-2)} \quad \min\left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\delta t} + AU^{n+1} + q(t_{n+1}),\ DU^{n+1} - d(t_{n+1})\right) = 0.$$

On suppose n fixé et on note $B = I + \delta tA$, $\bar{b} = U^n - \delta tq(t_{n+1})$ et $d = d(t_{n+1})$. Le calcul de $x = U^{n+1}$ se ramène donc à la résolution

$$F(x) := \min(Bx - \bar{b}, Dx - d) = 0 \tag{20}$$

III.2 Pour $\alpha \in \{0,1\}^I$, on définit maintenant $B(\alpha)$, $b(\alpha)$ par:

$$B_{ij}(\alpha) = \begin{cases} B_{i,j} \text{ si } \alpha_i = 0 \\ D_{i,j} \text{ si } \alpha_i = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_i(\alpha) = \begin{cases} \bar{b}_i \text{ si } \alpha_i = 0 \\ d_i \text{ si } \alpha_i = 1 \end{cases}.$$

En s'inspirant de la question II.2(ii), montrer que $B(\alpha)$ est monotone. En déduire l'existence d'une solution de $F(x) = 0$, ainsi qu'un algorithme de calcul de x.

III.3 On pose, pour tout $t \geq 0$, $s \geq 0$ et ψ fonction de classe $\mathcal{C}^2$,

$$H((t,s),\psi) = \min\left(\partial_t\psi - \frac{\sigma^2}{2}s^2\partial_{s,s}\psi - rs\partial_s\psi + r\psi,\ \frac{\Gamma(t,s)}{s} - \partial_{s,s}\psi\right),$$

ainsi que $\rho = (h, \delta t)$ et $U^\rho = (U_j^n)$ la solution du schéma **(S-2)**. Définir pour tout (t,s,u) réels et pour toute fonction ψ, une valeur $S_\rho((t,s),u,\psi)$ telle que

(i) le schéma **(S-2)** s'écrive

$$S_\rho((t_{n+1}, s_j), U_j^{n+1}, [U^\rho]) = 0,$$

où $U^\rho = (U_j^n)_{0 \le n \le N, 1 \le j \le I}$ et $[U^\rho]$ désigne une fonction continue d'interpolation des valeurs (U_j^n) aux points (t_n, s_j);

(ii) on a pour tout $t > 0$, $s \in (0, s_{\max})$:

$$\lim_{s_j \to s,\ t_{n+1} \to t,\ (h, \delta t, \xi) \to 0} S_\rho\bigg((t_{n+1}, s_j), \psi(t_{n+1}, s_j) + \xi, \psi + \xi\bigg) = H((t, s), \psi). \quad (21)$$

III.4 Montrer que S_ρ est monotone.

III.5 On désire établir par récurrence sur n que

$$0 \le U_i^n \le K, \quad 1 \le i \le I,$$

indépendament de $n, i, \delta t, h$. On note $x = U^{n+1}$ une solution du système (20).
(i) Montrer $\bar{b} \ge 0$, en déduire $x \ge 0$.
(ii) On note i_0 un indice t.q. $x_{i_0} = \max_{1 \le j \le I} x_j$. On suppose que $\alpha_{i_0} = 0$ (c'est à dire $(Bx - \bar{b})_{i_0} = 0$) avec $i_0 \ge 2$. Montrer alors que $x_{i_0} \le U_{i_0}^n \le K$.
(iii) Dans le cas particulier où $i_0 = 1$ montrer que $0 \le x_1 \le \frac{\bar{b}_1}{\delta_1} \le K$. (On pourra utiliser que $\delta_1 := |B_{11}| - \sum_{j \ge 2} |B_{1j}| \ge 1 + \delta t a_1$ après l'avoir vérifié).
(iv) On suppose maintenant que $\alpha_{i_0} = 1$ (c'est à dire $(Dx - d)_{i_0} = 0$). Considérer le premier indice $i > i_0$ tel que $\alpha_{i_0} = \alpha_{i_0+1} = \cdots = \alpha_{i-1} = 1$ et $\alpha_i = 0$ (en supposant qu'un tel indice i existe, avec $i \le I$). Montrer que $x_{i_0} = x_{i_0+1} = \cdots = x_i$ et que $x_i \le b_i$, puis conclure. Conclure de manière analogue dans le cas où $\alpha_{i_0} = \alpha_{i_0+1} = \cdots = \alpha_I = 1$.

III.6 Enoncer un résultat de convergence pour le schéma **(S-2)**.