Méthodes Déterministes en Finance

Problème - 19 Février 2008

Corrigé partiel

I.1(i) On obtient le problème (2')–(3')–(4'):

$$\begin{cases} \min\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - rs\frac{\partial v}{\partial s} + rv,\ \Gamma_0 - s\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) = 0, \quad t \in]0,T],\ s \geq 0, \\ v(0,s) = \hat{\varphi}(s). \\ \frac{\partial v}{\partial t}(t,0) + rv(t,0) = 0, \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

I.1(ii) $v(t,0) = v(0,0)\exp(-rt) = \hat{\varphi}(0)\exp(-rt)$.

I.2(i) On peut prendre $v(t, s_{\max}) = 0$, en donnant un argument financier.

I.2(ii) On peut prendre $v(t, s_{\max}) = s_{\max} - K\exp(-rt)$, en donnant un argument financier, ou en invoquant la parité call-put (on vérifie que $s - K\exp(-rt)$ est bien solution du problème (2')–(3')–(4'), avec condition initiale $\varphi(s) = s - K\exp(-rt)$).

I.3 Si on prend deux solutions $\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_2$, on utilisant le principe de comparaison, on montre successivement que $\hat{\varphi}_1 \leq \hat{\varphi}_2$ et que $\hat{\varphi}_1 \geq \hat{\varphi}_2$.

I.4 Immédiat en vérifiant que φ est bien solution de (5)–(6)–(7) et en invoquant l'unicité de la solution.

I.5 On vérifie que $\partial_t h - \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} - (r+\sigma^2)s\frac{\partial h}{\partial s} = 0$. De plus, $h(t=0) \geq 0$. Donc par le principe du maximum, $h \geq 0$.

I.6 Immédiat. Pour construire une solution dans le cas où φ n'est pas Γ-concave, on peut donc tout d'abord considérer la solution $\hat{\varphi}$ de (5)–(6)–(7), puis la solution w de (10) avec comme condition initiale $\hat{\varphi}$. Bien sûr, cette construction n'est possible que pour Γ constant.

I.7.a On obtient une matrice A tridiagonale: (diagonale inférieure) $A_{i,i-1} = -\sigma^2 s_i^2/(2h^2) = -a_i$, (diagonale) $A_{i,i} = \sigma^2 s_i^2/h^2 + rs_i/h + r = 2a_i + b_i + r$, (diagonale supérieure) $A_{i,i+1} = -\sigma^2 s_i^2/(2h^2) - rs_i/h = -a_i - b_i$. Le vecteur q contient les conditions aux limites: $q(t) = (-\sigma^2 s_1^2 K e^{-rt}/(2h^2), 0, \ldots, 0)^T = (-a_1 K e^{-rt}, 0, \ldots, 0)^T$.

I.7.b Immédiant en appliquant le résultat sur les M-matrices rappelé en introduction du sujet.

I.7.c D'après le cours, le schéma est d'ordre 1 en temps et en espace. Comme il est stable en norme L^∞, on peut donc en déduire que la norme L^∞ de l'erreur est majoré par $C(h + \delta t)$.

I.7.d C'est du cours. Pour monter en ordre en temps, on peut utiliser le schéma de Crank-Nicolson. Pour monter un ordre en espace, on peut utiliser une différence finie centrée pour discrétiser le terme $-rs\frac{\partial v}{\partial s}$. Dans ce cas, on perd la stabilité L^∞, mais le schéma reste stable en en norme L^2.

II.1 Il est clair que (13) est équivalent à (5) (en divisant par $s > 0$ le second argument du min dans (5)). (15) s'écrit sous la forme $\min(U - g, DU - d) = 0$ dans $\mathbb{R}^I$ avec $g = (g_1, \ldots, g_I)^T$, D une matrice tridiagonale de coefficients $-1/h^2$

sur les diagonales inférieure et supérieure, et $2/h^2$ sur la diagonale, et $d = (-f_1 + K/h^2, -f_2, \dots, -f_I)^T$.

II.2(i) Il est immédiat de vérifier que $F(x) = \min_{\alpha\in\{0,1\}^I}\Big(B(\alpha)x - b(\alpha)\Big)$ (cf. le cours).

II.2(ii) Soit $\alpha \in \{0,1\}^I$, et $X = (x_1, \dots, x_I) \in R^I$ tel que $B(\alpha)X \geq 0$. Soit i_0 t.q. $x_{i_0} = m = \min_j(x_j)$. Si $\alpha_{i_0} = 0$, on a $\sum_j \delta_{i_0,j}x_j \geq 0$, soit $x_{i_0} \geq 0$ ce qui termine la preuve.

Si $\alpha_{i_0} = 1$, on définit $i_1 =: \min\{k \leq i_0,\ \forall l \in \{k, \dots, i_0\},\ \alpha_l = 1\}$ et $j_1 =: \max\{k \geq i_0, \forall l \in \{i_0, \dots, k\}, \alpha_l = 1\}$. Pour $i \in \{i_1, \dots, j_1\}$, on a $(DX)_i \geq 0$. En $i = i_0$, on a donc $x_{i_0-1} + x_{i_0+1} \leq 2m$, ce qui implique (puisque $x_{i_0-1} \geq m$ et $x_{i_0+1} \geq m$) que $x_{i_0-1} = m$ et $x_{i_0+1} = m$. En raisonnant par récurrence (de proche en proche), on montre donc que $x_i = m$ pour tout $i \in \{\max(i_1-1, 1), \dots, \min(j_1+1, I)\}$.

Considérons maintenant ce qui se passe aux bords de cet intervalle. Supposons que $i_1 \geq 2$. Dans ce cas, on a $\alpha_{i_1-1} = 0$ et donc $x_{i_1-1} \geq 0$ (puisque $\sum_j \delta_{i_1-1,j}x_j \geq 0$). On en déduit que $m \geq 0$ ce qui conclut la preuve. Le raisonnement est le même si $j_1 \leq I - 1$. Reste le cas $i_1 = 1$ et $j_1 = I$. En écrivant $(DX)_1 \geq 0$, on obtient $2x_1 - x_2 \geq 0$. Comme $x_1 = x_2 = m$, ceci implique que $m \geq 0$ ce qui conclut la preuve.

II.2(iii) Soit deux solutions $F(X_1) = F(X_2) = 0$. On note α_1 (resp. α_2) le vecteur α tel que $\min_{\alpha\in\{0,1\}^I}(B(\alpha)X_1 - b(\alpha)) = B(\alpha_1)X_1 - b(\alpha_1)$ (resp. tel que $\min_{\alpha\in\{0,1\}^I}(B(\alpha)X_2 - b(\alpha)) = B(\alpha_2)X_2 - b(\alpha_2)$). On a donc $B(\alpha_1)X_1 = b(\alpha_1)$ et $B(\alpha_1)X_2 \geq b(\alpha_1)$ ce qui implique que $X_2 \geq X_1$ puisque $B(\alpha_1)$ est monotone. De même, on montre que $X_1 \geq X_2$, ce qui termine la preuve.

II.3(i) G est inversible car c'est une matrice $B(\alpha)$ pour un α bien choisie, et on a montré que $B(\alpha)$ est monotone (donc inversible).

II.3(ii) C'est du cours. L'algorithme converge vers la solution du problème $F(x) = 0$ et la convergence a lieu en au plus I itérations.

II.3(iii) G est une matrice triadiagonale, donc le coût de la résolution par une méthode LU est d'ordre I.

II.4(i) Immédiat puisque $||D^{-1}||_\infty \leq \frac{s_{\max}^2}{8}$.

II.4(ii) On définit $w_j = a + (j - p + 1)h'$ où $h' = (b - a)/(q - p + 2)$. On vérifie que $D(v - w) = -f$ et que $(v - w)_{p-1} = (v - w)_{q+1} = 0$. D'après la question précédente, on a donc $\max_{j=p,\dots,q}|v_j - w_j| \leq \frac{1}{8}s_{\max}^2 \max_{j=p,\dots,q}|f_j|$. Or $|v_j| \leq |v_j - w_j| + |w_j| \leq |v_j - w_j| + \max(|a|, |b|)$ d'où le résultat.

II.4(iii) On sait que $U = U^h$ est solution de $B(\alpha)U = b(\alpha)$ pour α tel que $\min_{\alpha\in\{0,1\}^I}(B(\alpha)U - b(\alpha)) = B(\alpha)U - b(\alpha)$. Si on considère les points où $\alpha_i = 0$, on a clairement $|U_i| \leq \max_{j=0,\dots,I+1}|g_j| + \frac{1}{8}s_{\max}^2 \max_{j=1,\dots,I}|f_j|$ puisque $U_i = g_i$. Si on considère une zone $\{p, \dots, q\}$ telle que pour $i \in \{p, \dots, q\}$, $\alpha_i = 1$, et aux bords, $\alpha_{p-1} = \alpha_{q+1} = 0$ (avec la convention $\alpha_0 = \alpha_{I+1} = 0$), on déduit de la question précédente que $\max_{j=p,\dots,q}|U_j| \leq \max(|g_{p-1}|, |g_{q+1}|) + \frac{1}{8}s_{\max}^2 \max_{j=p,\dots,q}|f_j|$ ce qui conclut la preuve. Ceci montre la stabilité du schéma avec

$$C_1 = \sup_{s\in 0,s_{\max}} |\varphi(s)| + \frac{1}{8}s_{\max}^2 \sup_{s\in 0,s_{\max}} |f(s)|.$$

II.5(i) C'est immédiat.

II.5(ii) C'est immédiat (en utilisant des développements limités).

II.6 C'est immédiat.

II.7 Cela se déduit des résultats du cours. On a admis le principe de comparaison. D'après la consistance, la stabilité - sous l'hypothèse $\Gamma(t,s)/s$ bornée - et la monotonie du schéma (ce dernier étant bien défini grâce à l'existence de solution U^h à $S_h = 0$), on obtient la convergence au sens suivant: pour tout $s \geq 0$,

$$\lim_{h\to 0,\ s_j\to s} U_j^h = \hat{\varphi}(s).$$

Remarque: Dans le cours le théorème de convergence énoncé portait sur des schémas en espace et en temps. On admet donc ici une version équivalente dans le cas indépendant du temps.

III.1(i) C'est immédiat.

III.1(ii) Il suffit d'appliquer le schéma proposé à la question II.3.

III.1(iii) On utilise ici un schéma explicite, dont on sait qu'il est stable que sous condition CFL.

III.2 Le raisonnement est le même que pour la question II.2(ii), la matrice identité ayant été remplacée ici par la matrice $B = I + \delta t A$ qui est monotone. Le seul point à vérifier est le suivant : soit i tel que $x_i = m = \min_j(x_j)$ et $\sum_j B_{i,j}x_j \geq 0$, alors $x_i \geq 0$. Comme B est une M-matrice, on a $\sum_j B_{i,j}x_j \leq m\sum_j B_{i,j} = m(1 + r\delta t)$ d'où $m \geq 0$.

III.3 Il suffit de prendre

$$\begin{aligned} S_\rho((t,s),u,\psi) = \min\Big(&\frac{u-\psi(t-\delta t,s)}{\delta t} - \frac{\sigma^2}{2}s_j^2\frac{\psi(t,s-h)-2u+\psi(t,s+h)}{h^2} \\ &- rs_j\frac{\psi(t,s+h)-u}{h} + ru, \\ &f(t,s) + \frac{-\psi(t,s-h)+2u-\psi(t,s+h)}{h^2}\Big). \end{aligned}$$

III.4 On vérifie facilement que S_ρ est monotone au sens suivant: $\forall (t,s), u \in \mathbb{R}$, $\forall \phi, \psi$ (fonctions C^2), on a

$$\phi \leq \psi \quad \Rightarrow \quad S_\rho((t,s),u,\phi) \geq S_\rho((t,s),u,\psi).$$

III.5 (i) On note que $q(t) \leq 0$ et donc $b = U^n - \delta t q(t_{n+1}) \geq U^n \geq 0$. Or $Bx - b \geq \min(Bx - \bar{b}, Dx - d) = 0$ donc $Bx \geq \bar{b} \geq 0$. Comme B monotone on en déduit que $x \geq 0$.

III.5 (ii) $(Bx-\bar{b})_{i_0}=0$ donc

$$\begin{aligned}\bar{b}_{i_0} &= B_{i_0i_0}x_{i_0}-\sum_{j\neq i_0}|B_{i_0j}|x_j\\ &\geq \left(B_{i_0i_0}-\sum_{j\neq i_0}|B_{i_0j}|\right)x_{i_0}.\end{aligned}$$

Avec $\delta_i := B_{i_0i_0}-\sum_{j\neq i_0}|B_{i_0j}|$ on voit que $\delta_i \geq 1$ et donc $x_{i_0}\leq \frac{\bar{b}_{i_0}}{\delta_{i_0}}\leq \bar{b}_{i_0}$. Pour $i_0\geq 2$, cela donne $x_{i_0}\leq U^n_{i_0}$.

III.5 (iii) De façon similaire et calculatoire, $0\leq x_1\leq \frac{\bar{b}_1}{\delta_1}\leq K$.

III.5 (iv) Si $i_0\geq 2$, pour tout j t.q. $i_0\leq j<i$ on obtient $(-x_{j-1}+x_j)+(x_j-x_{j+1})=h^2d_j=-h^2\frac{\Gamma}{s_j}\leq 0$. En $j=i_0$, x_{i_0} maximal et donc nécessairement $x_{i_0-1}=x_{i_0}=x_{i_0+1}$. De proche en proche on obtient finalement que $x_{i_0}=\cdots=x_{i-1}=x_i$. D'autre part pour x_i on a $\alpha_i=0$ et donc $x_i\leq\frac{\bar{b}_i}{\delta_i}\leq\bar{b}_i\leq U^n_i\leq K$. Dans le cas $i_0=1$, $x_1-x_2\geq 0$ et on déduit de $(Dx-d)_1=0$ que

$$x_1=-(x_1-x_2)+(-\frac{\Gamma}{s_1}+\frac{v_g(t_{n+1})}{h^2})h^2\leq v_g(t_{n+1})\leq K.$$

Enfin si i n'existe pas, on peut faire un raisonnement analogue en posant $x_{I+1}=0$ et on obtient $x_{i_0}=0$. Dans tous les cas on a donc $x_i\leq K$.

III.6 Le schema est stable ($|U^n_i|\leq K$), consistant et monotone. En admettant le principe de comparaison pour l'E.D.P. considérée, on obtient alors la convergence au sens suivant: pout tout $t\geq 0$, $s\in[0,s_{\max}]$,

$$\lim_{t_n\to t,\ x_j\to s,\ \rho=(\delta t,h)\to 0} U^n_j=v(t,s)$$

où v est la solution cherchée.