Méthodes Déterministes en Finance

2 Février 2009

Durée : 3 heures.

Les notes de cours manuscrites sont autorisées. Les questions pourront être traitées indépendamment les unes des autres.

Méthode de différences finies généralisées

On s'intéresse à la discrétisation numérique par différences finies du problème

$$\partial_t v - a_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2a_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - a_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = 0,\ t \in [0,T],\ x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1a}$$

$$v(t,x) = v_b(t,x), \quad t \geq 0, \quad x \notin \Omega, \tag{1b}$$

$$v(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{1c}$$

où $a_{11},\ a_{12},\ a_{22}$ sont des fonctions de $x = (x_1, x_2)$, $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ est un pavé de $\mathbb{R}^2$, v_b est une fonction connue (qui définit les valeurs de v en dehors de Ω, et en particulier sur $\partial\Omega$) et φ est la condition initiale. On notera $a : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ la fonction à valeurs dans les matrices symétriques :

$$a := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Remarquer qu'on peut réécrire l'opérateur différentiel dans (1a) sous la forme :

$$a_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = \mathrm{Tr}\left(aD^2 v\right),$$

où $D^2 v = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$ désigne la hessienne de v. Dans toute la suite, on supposera la matrice $a(x)$ symétrique définie positive (pour tout $x \in \mathbb{R}^2$) et de trace bornée : $\|\mathrm{Tr}(a)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$.

Il est connu que les schémas aux différences finies classiques ne sont pas stables en norme L^∞ si $|a_{12}|$ est trop grand. L'objectif de ce problème est d'analyser des schémas aux différences finies stables en norme L^∞, quelque soit la valeur du coefficient a_{12}.

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, $h > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^2$ non nul, on adoptera la notation :

$$\Delta_\xi^h u(x) := \frac{u(x+\xi h) - 2u(x) + u(x - \xi h)}{h^2\|\xi\|^2},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. Dans toute la suite, les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont des vecteurs colonnes.

1. Montrer que pour $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$ et pour tout $h > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^2$ (avec $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$), on a

$$\left| \Delta_\xi^h u(x) - \mathrm{Tr}\left(D^2 u(x) \frac{\xi \xi^T}{\|\xi\|^2} \right) \right| \leq C_0 h^2 \|\xi\|^2,$$

où C_0 est une constante qu'on explicitera en fonction de $C_4(u) := \max_{i,j,k,\ell=1,2} \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_\ell} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$. *(On pourra utiliser un développement de Taylor à l'ordre 4 pour la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto u(x + t\xi) \in \mathbb{R}$).*

2. Pour $p \geq 1$ un entier fixé, on pose

$$S_p := \left\{ \xi \in \mathbb{Z}^2,\ (\xi_1, \xi_2) \neq (0,0), \|\xi\|_\infty \leq p \right\},$$

où $\|\xi\|_\infty = \max(|\xi_1|, |\xi_2|)$ désigne la norme L^∞ du vecteur ξ. Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, on définit la norme de Frobenius par :

$$\|A\|_F := \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^T)} = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}.$$

Supposons que, pour $x \in \Omega$ fixé, on dispose de réels $(\gamma_\xi(x))_{\xi \in S_p}$ vérifiant $\gamma_\xi \geq 0$, $\sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi(x) = 1$ et

$$\left\| \frac{a(x)}{\mathrm{Tr}(a(x))} - \sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi(x) \frac{\xi \xi^T}{\|\xi\|^2} \right\|_F \leq \epsilon_p.$$

Montrer alors l'estimation (pour $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$)

$$\left| \mathrm{Tr}(a(x)) \sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi(x)\, \Delta_\xi^h u(x) - \mathrm{Tr}\left(a(x) D^2 u(x) \right) \right| \leq \mathrm{Tr}(a(x)) \left(C_1 h^2 p^2 + C_2 \epsilon_p \right) \qquad (2)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes qu'on explicitera.

3. Manipulations Algébriques. Soit

$$\mathcal{M} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ A_{12} = A_{21},\ A_{11} A_{22} \geq (A_{12})^2,\ A_{11} + A_{22} = 1 \right\}.$$

a. Montrer que $\mathcal{M}$ est l'ensemble des matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symétriques et positives (*i.e.* telles que $\xi^T A \xi \geq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$), de trace 1. Vérifier que $A_{11} \geq 0$ et $A_{22} \geq 0$. Montrer que $\mathcal{M}$ est un ensemble convexe et que $\forall x \in \Omega$, $a(x)/\mathrm{Tr}(a(x)) \in \mathcal{M}$.
b. On définit l'application $\Psi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^2$ définie par : pour tout $A \in \mathcal{M}$,

$$\Psi(A) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{22} \\ 2A_{12} \end{pmatrix}.$$

Montrer que Ψ est une application bijective et d'image

$$\Psi(\mathcal{M}) = D$$

où $D = \{w \in \mathbb{R}^2, \|w\| \leq 1\}$ désigne le disque unité de $\mathbb{R}^2$. *(On pourra vérifier et utiliser le fait que* $\|\Psi(A)\|^2 = 1 - 4\det A$*).*

Montrer que l'application Ψ est telle que : $\forall A, A' \in \mathcal{M}$,

$$\|A - A'\|_F = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\Psi(A) - \Psi(A')\|.$$

c. On introduit

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \{A \in \mathcal{M}, A \text{ est de rang } 1\}.$$

L'ensemble $\widetilde{\mathcal{M}}$ est-il convexe ? On rappelle que toute matrice dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ de rang 1 peut s'écrire sous la forme $\xi^1(\xi^2)^T$ avec $\xi^1,\ \xi^2 \in \mathbb{R}^n$. En déduire que

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \left\{A = \frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2},\ \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right\}.$$

d. Montrer que Ψ est une application bijective de $\widetilde{\mathcal{M}}$ sur le cercle unité $\partial D = \{w \in \mathbb{R}^2, \|w\| = 1\}$. Soit $A = \dfrac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2} \in \widetilde{\mathcal{M}}$ et α tel que $\dfrac{\xi}{\|\xi\|} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$. Montrer que

$$\Psi(A) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

4. Un exemple.

a. On considère quatre vecteurs de S_1 :

$$\xi^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi^2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \xi^3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \xi^4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et les matrices associées $A^i = \dfrac{\xi^i(\xi^i)^T}{\|\xi^i\|^2} \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Pour $i = 1, \ldots, 4$, on note $w^i = \Psi(A^i)$. Représenter graphiquement les vecteurs $(w^i)_{i=1,\ldots,4} \in \partial D$.

b. On introduit les combinaisons convexes des matrices $(A^i)_{i=1,\ldots,4}$:

$$\mathrm{Conv}((A^i)_{i=1,\ldots,4}) := \left\{A = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i A^i,\ \gamma_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{4} \gamma_i = 1\right\}.$$

Expliquer pourquoi $\Psi(\mathrm{Conv}((A^i)_{i=1,\ldots,4}))$ est l'ensemble des combinaisons convexes des vecteurs $(w^i)_{i=1,\ldots,4}$. Représenter graphiquement $\Psi(\mathrm{Conv}((A^i)_{i=1,\ldots,4}))$. Vérifier que cet ensemble est en fait $D_1 := \Psi\left(\mathrm{Conv}\left(\left(\frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2}\right)_{\xi\in S_1}\right)\right)$.

c. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Conv}((A^i)_{i=1,\ldots,4})$ coïncide avec l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}$ qui sont à diagonale dominante (c'est-à-dire vérifiant $A_{11} \geq |A_{12}|$ et $A_{22} \geq |A_{12}|$).

5. Construction d'une approximation $\Pi_p(A)$. Soit $A \in \mathcal{M}$ et $w = \Psi(A)$ fixés. Soit $p \geq 1$ un entier fixé. Soit l'ensemble de matrices :

$$\Gamma_p := \mathrm{Conv}\left(\left(\frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2}\right)_{\xi \in S_p}\right) = \left\{\sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi \frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2},\ \gamma_\xi \geq 0,\ \sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi = 1\right\}.$$

a. Vérifier que $\Gamma_p \subset \mathcal{M}$. On note $D_p := \Psi(\Gamma_p)$ le sous-ensemble de D associé à Γ_p. Expliquer pourquoi D_p est un polygône convexe de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(w_\xi)_{\xi \in S_p}$, avec $w_\xi = \Psi\left(\frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2}\right)$. Faire un dessin schématique de $D_p \subset D$.

Soit π_p la projection orthogonale dans $\mathbb{R}^2$ sur D_p. On définit alors l'approximation de A dans Γ_p par :

$$\Pi_p(A) := \Psi^{-1}(\pi_p(w)).$$

Si $w \in D_p$, on a $\pi_p(w) = w$ et donc $\|\Pi_p(A) - A\|_F = 0$. Dans la suite de cette section, on suppose donc que $w \notin D_p$ et on cherche à majorer l'erreur $\|\Pi_p(A) - A\|_F$.

b. Expliquer pourquoi $\pi_p(w)$ peut s'écrire comme la combinaison convexe de deux sommets w_ξ et $w_{\xi'}$ de D_p (avec $\xi, \xi' \in S_p$).

c. Exprimer alors $\Pi_p(A)$ en fonction de $\dfrac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2}$ et de $\dfrac{\xi'(\xi')^T}{\|\xi'\|^2}$.

d. Soit $\theta \in [0, \pi/2]$ l'angle entre les vecteurs w_ξ et $w_{\xi'}$. Montrer que

$$\|\pi_p(w) - w\| \leq 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

(Il suffira de considérer le pire des cas, lorsque w est à égale distance de w_ξ et de $w_{\xi'}$.)

e. Montrer que $\theta = 2\beta$, où $\beta \in [0, \pi/4]$ est l'angle entre les deux vecteurs ξ et ξ' dans $\mathbb{R}^2$.

f. En déduire que

$$\|\pi_p(w) - w\| \leq \frac{\beta^2}{2}.$$

g. On admet que l'angle β le plus grand possible entre deux vecteurs ξ et ξ' est atteint par exemple dans le cas particulier de $\xi = (1, 0)$ et $\xi' = (p, 1)$. En déduire la majoration

$$\beta \leq \frac{1}{p}.$$

h. On considère à nouveau la fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ introduite au début du problème. Déduire des questions précédentes la majoration : $\forall x \in \Omega$,

$$\left\| \frac{a(x)}{\mathrm{Tr}(a(x))} - \Pi_p\left(\frac{a(x)}{\mathrm{Tr}(a(x))}\right)\right\|_F \leq \frac{C_3}{p^2}, \tag{3}$$

où C_3 est une constante qu'on explicitera.

6. Schéma d'approximation pour (1)**.**
On considère un pas de temps $\delta t > 0$, un pas d'espace $h > 0$ et une grille régulière

$$G_h := \left\{(i_1\, h, i_2 h),\, (i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2,\, 0 \leq i_1 \leq L_1/h, 0 \leq i_2 \leq L_2/h\right\}$$

de $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ (on suppose que $L_1/h, L_2/h \in \mathbb{N}$). On note $i = (i_1, i_2)$, $x_i = (i_1 h, i_2 h)$ et on cherche V_i^n une approximation de $v(t_n, x_i)$ (pour $n \in \{0, \dots, N\}$, où $N = T/\delta t \in \mathbb{N}$).

Pour discrétiser (1) au point $x = x_i$, on approche la matrice $a(x)$ par une matrice notée $a_p(x)$ ($p \geq 1$ étant un entier fixé) avec

$$a_p(x) := \mathrm{Tr}(a(x))\, \Pi_p\left(\frac{a(x)}{\mathrm{Tr}(a(x))}\right).$$

La matrice a_p s'écrit donc sous la forme

$$a_p(x) = \mathrm{Tr}(a(x)) \sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi(x) \frac{\xi \xi^T}{\|\xi\|^2},$$

avec des coefficients $\gamma_\xi \geq 0$ (dépendants de x), et $\sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi = 1$.

On introduit alors le schéma explicite (SE) suivant (en un point $x = x_i \in G_h$) :

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\delta t} - \mathrm{Tr}(a(x_i)) \sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi(x_i) \frac{V_{i+\xi}^n - 2V_i^n + V_{i-\xi}^n}{h^2 \|\xi\|^2} = 0.$$

a. On pose $W_i^n := v(t_n, x_i)$. On suppose que la solution v de (1) est régulière, avec des dérivées bornées en norme $L^\infty([0,T] \times \Omega)$ (jusqu'à l'ordre 2 en temps et 4 en espace). On note ϵ_i^n l'erreur de consistance :

$$\epsilon_i^n := \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\delta t} - \mathrm{Tr}(a(x_i)) \sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi(x_i) \frac{W_{i+\xi}^n - 2W_i^n + W_{i-\xi}^n}{h^2 \|\xi\|^2}.$$

Montrer la majoration

$$|\epsilon_i^n| \leq C \left(\delta t + h^2 p^2 + \frac{1}{p^2}\right)$$

où C est une constante qu'on explicitera en fonction de v et des données du problème.

b. En déduire un choix optimal de p pour un h fixé, puis une majoration de l'erreur de consistance ne faisant intervenir que δt et h pour ce choix de p. Quel est l'ordre de consistence en h du schéma ainsi construit ?

c. Montrer que le schéma (SE) est stable en norme L^∞ sous une condition sur les pas $(h, \delta t)$. Expliciter cette condition.

7. Proposer une version implicite du schéma précédent, et montrer qu'on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\delta t} + MV^{n+1} = b$$

où M est une matrice et b un vecteur. Montrer que ce schéma (SI) est stable en norme L^∞ sans condition sur les pas $(h, \delta t)$.

8. Proposer un schéma stable en norme L^∞ pour discrétiser un problème d'obstacle du type :

$$\begin{aligned}
&\min \left(\partial_t v + \mathrm{Tr}\left(aD^2 v\right) - r\partial_x v - r\partial_y v + rv,\ v - \varphi \right) = 0, \quad t \in [0,T],\, x \in \Omega, \\
&v(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega.
\end{aligned}$$

avec $r > 0$ fixé.