Méthodes Déterministes en Finance
2 Février 2009

Corrigé

1 Soit $f : t \mapsto u(x+t\xi)$. On a classiquement

$$\left| f''(0) - \frac{f(h)-2f(0)+f(-h)}{h^2} \right| \leq \|f^{(4)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} h^2.$$

Or, on vérifie que $f''(0) = \mathrm{Tr}\left(D^2u(x)\xi\xi^T\right)$, $\frac{f(h)-2f(0)+f(-h)}{h^2} = \|\xi\|^2 \Delta_\xi^h u(x)$, et $\|f^{(4)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_4(u)\|\xi\|^4$, d'où le résultat, avec $C_0 = C_4(u)$.

2 On a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(a(x)) \sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi \, \Delta_\xi^h u(x) - \mathrm{Tr}\left(a(x) D^2 u(x)\right) \\
&\qquad = \mathrm{Tr}(a(x)) \left(\sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi \left(\Delta_\xi^h u(x) - \mathrm{Tr}\left(D^2 u(x) \frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2} \right) \right) \right) \\
&\qquad\quad + \mathrm{Tr}(a(x)) \, \mathrm{Tr}\left(D^2 u(x) \left(\sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi \frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2} - \frac{a(x)}{\mathrm{Tr}(a(x))} \right) \right).
\end{aligned}$$

Et donc, en utilisant Cauchy Schwarz (noter que $\mathrm{Tr}(a(x)) > 0$) :

$$\begin{aligned}
&\left| \mathrm{Tr}(a(x)) \sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi \, \Delta_\xi^h u(x) - \mathrm{Tr}\left(a(x) D^2 u(x)\right) \right| \\
&\qquad \leq \mathrm{Tr}(a(x)) \left(\sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi \left| \Delta_\xi^h u(x) - \mathrm{Tr}\left(D^2 u(x) \frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2} \right) \right| \right) \\
&\qquad\quad + \mathrm{Tr}(a(x)) \|D^2 u(x)\|_F \left\| \sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi \frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2} - \frac{a(x)}{\mathrm{Tr}(a(x))} \right\|_F \\
&\qquad \leq \mathrm{Tr}(a(x)) \left(C_0 h^2 \sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi \|\xi\|^2 \right) + \mathrm{Tr}(a(x)) \|D^2 u(x)\|_F \, \epsilon_p,
\end{aligned}$$

d'où le résultat avec $C_1 = 2C_0$ et $C_2 = \|D^2u(x)\|_F$.

3.a Une matrice $A \in \mathcal{M}$ est symétrique donc diagonalisable. De plus $\det(A) = A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 \geq 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 1$ donc les valeurs propres de A sont positives ou nulles, ce qui implique que A est bien une matrice positive. En prenant successivement $\xi = (1,0)$ puis $\xi = (0,1)$ dans l'inégalité $\xi^T A \xi \geq 0$, on vérifie que $A_{11} \geq 0$

et $A_{22} \geq 0$. Il est ensuite facile de vérifier que $\mathcal{M}$ est un ensemble convexe et que $\forall x \in \Omega$, $a(x)/\mathrm{Tr}(a(x)) \in \mathcal{M}$.

3.b Soit $A \in \mathcal{M}$ et $w = \Psi(A)$. On a

$$\begin{aligned}\|w\|^2 &= (A_{11} - A_{22})^2 + 4(A_{12})^2 \\ &= (A_{11} + A_{22})^2 - 4A_{11}A_{22} + 4(A_{12})^2 \\ &= 1 - 4\det A.\end{aligned}$$

Comme $\det A \geq 0$, on a bien $\|w\| \leq 1$, et donc $\Psi(\mathcal{M}) \subset D$. Noter que, en utilisant le fait que $\mathrm{Tr}(A) = 1$, $w_1 = A_{11} - A_{22} = 2A_{11} - 1 = 1 - 2A_{22}$.

Réciproquement, soit $w \in D$. On pose alors $\Psi^{-1}(w) = A$ avec $A_{11} = (1 + w_1)/2$, $A_{22} = (1 - w_1)/2$ et $A_{12} = A_{21} = w_2/2$. On vérifie facilement que $A \in \mathcal{M}$, et que $\Psi(\Psi^{-1}(w)) = w$. Par conséquent, $\Psi : \mathcal{M} \to D$ est une application bijective.

Soit $A,\ A' \in \mathcal{M}$. On note $w = \Psi(A)$ et $w' = \Psi(A')$. On a (en utilisant le fait que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A') = 1$),

$$\begin{aligned}\|w - w'\|^2 &= \left(A_{11} - A_{22} - A'_{11} + A'_{22}\right)^2 + 4\left(A_{12} - A'_{12}\right)^2 \\ &= \left(A_{11} - (1 - A_{11}) - A'_{11} + (1 - A'_{11})\right)^2 + 4\left(A_{12} - A'_{12}\right)^2 \\ &= 4\left(A_{11} - A'_{11}\right)^2 + 4\left(A_{12} - A'_{12}\right)^2.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\|A - A'\|_F^2 &= \sum_{ij} (A_{ij} - A'_{ij})^2 \\ &= (A_{11} - A'_{11})^2 + (A_{22} - A'_{22})^2 + 2(A_{12} - A'_{12})^2 \\ &= (A_{11} - A'_{11})^2 + (1 - A_{11} - 1 + A'_{11})^2 + 2(A_{12} - A'_{12})^2 \\ &= 2(A_{11} - A'_{11})^2 + 2(A_{12} - A'_{12})^2.\end{aligned}$$

On en déduit que $\|w - w'\|^2 = 2\|A - A'\|_F^2$, ce qui termine la preuve.

3.c L'ensemble $\widetilde{\mathcal{M}}$ n'est pas convexe puisque la combinaison convexe de deux matrices de rang 1 n'est pas de rang 1 en général. On peut considérer par exemple

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier qu'une matrice $A = \frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2}$ est bien dans $\widetilde{\mathcal{M}}$. Réciproquement, si $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$, A est de rang 1 donc on sait qu'elle s'écrit sous la forme $A = \xi^1(\xi^2)^T$ où ξ^1 et ξ^2 sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Le fait que $A_{12} = A_{21}$ implique que $\xi_1^1\xi_2^2 = \xi_2^1\xi_1^2$ et donc les deux vecteurs ξ^1 et ξ^2 sont colinéaires: $\xi^2 = \lambda\xi^1$ avec $\lambda \neq 0$ (sinon $A = 0$). On a donc $A = \lambda\,\xi^1(\xi^1)^T$. Noter alors que $\mathrm{Tr}(A) = \lambda\|\xi^1\|^2$ et donc le fait que $\mathrm{Tr}(A) = 1$ implique que $\lambda = 1/\|\xi^1\|^2$ ce qui termine la preuve.

3.d Soit $A = \frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2} \in \widetilde{\mathcal{M}}$ et $w = \Psi(A)$. On vérifie que $\|w\|^2 = 1 - 4\det A = 1$ et donc $w \in \partial D$. Réciproquement, pour tout vecteur $w \in \partial D$, $\Psi^{-1}(w)$ est de déterminant nul, et donc $\Psi^{-1}(w)$ est de rang 1 ($\Psi^{-1}(w)$ ne peut pas être de rang 0 car sa trace vaut 1).

Si $\xi/\|\xi\| = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, on a $w_1 = A_{11} - A_{22} = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha)$ et $w_2 = 2A_{12} = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \sin(2\alpha)$, ce qui montre le résultat annoncé.

En conclusion de la Section 3, toute matrice de $\mathcal{M}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}}$) peut être représentée de manière univoque par un vecteur de D (resp. ∂D), *via* l'application Ψ.

4.a On vérifie que $w^1 = (1,0)$, $w^2 = (0,1)$, $w^3 = (-1,0)$ et $w^4 = (0,-1)$.

4.b On remarque que l'application Ψ est linéaire. En particulier, pour tout quadruplet $(\gamma_i)_{i=1,\ldots,4}$ de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^4 \gamma_i = 1$, on a

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^4 \gamma_i A^i\right) = \sum_{i=1}^4 \gamma_i \Psi(A^i).$$

Donc l'image de $\mathrm{Conv}((A^i)_{i=1,\ldots,4})$ par Ψ est bien $\mathrm{Conv}((w^i)_{i=1,\ldots,4})$. Graphiquement, on obtient le carré de sommets $(w^i)_{i=1,\ldots,4}$. Ce carré est bien l'ensemble D_1 car si on considère les autres vecteurs de S_1 (*i.e.* $(-1,0)$, $(-1,-1)$, $(0,-1)$ et $(1,-1)$), on remarque que les vecteurs w associés sont encore les mêmes $(w_i)_{i=1,\ldots,4}$ que ceux considérés ci-dessus.

4.c Soit $A \in \mathcal{M}$ et $w = (w_1, w_2) = \Psi(A)$. On vérifie que

$$\begin{aligned} A \text{ est à diagonale dominante } &\iff A_{11} \geq |A_{12}| \text{ et } A_{22} \geq |A_{12}| \\ &\iff (1+w_1)/2 \geq |w_2|/2 \text{ et } (1-w_1)/2 \geq |w_2|/2 \\ &\iff 1 + w_1 \geq |w_2| \text{ et } 1 - w_1 \geq |w_2| \\ &\iff -w_1 \leq 1 - |w_2| \text{ et } w_1 \leq 1 - |w_2|. \end{aligned}$$

Ainsi, on a donc (puisque quand $w \in D$, $1 - |w_2| \geq 0$),

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{M} \text{ et est à diagonale dominante } &\iff w \in D \text{ et } -w_1 \leq 1 - |w_2| \text{ et } w_1 \leq 1 - |w_2| \\ &\iff w \in D \text{ et } |w_1| \leq 1 - |w_2| \\ &\iff |w_1| + |w_2| \leq 1 \\ &\iff w \in \mathrm{Conv}((w^i)_{i=1,\ldots,4}), \end{aligned}$$

puisqu'on remarque que le carré de sommets $(w^i)_{i=1,\ldots,4}$ est exactement l'ensemble des $w = (w_1, w_2)$ tels que $|w_1| + |w_2| \leq 1$. D'après la question précédente, la préimage par Ψ de ce carré est $\mathrm{Conv}((A^i)_{i=1,\ldots,4})$ ce qui conclue la preuve : $\mathrm{Conv}((A^i)_{i=1,\ldots,4})$ est bien l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}$ à diagonale dominante.

Une autre manière de montrer ce résultat : Toute matrice de $\mathrm{Conv}((A^i)_{i=1,\ldots,4})$ *est à diagonale dominante car combinaison convexe de matrices à diagonale positive et dominante. Réciproquement, on peut écrire une matrice de* $\mathcal{M}$ *à diagonale* *dominante sous la forme*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}-|A_{12}| & 0 \\ 0 & A_{22}-|A_{12}| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |A_{12}| & A_{12} \\ A_{12} & |A_{12}| \end{pmatrix} \\ &= (A_{11}-|A_{12}|)\frac{\xi^1(\xi^1)^T}{\|\xi^1\|^2} + (A_{22}-|A_{12}|)\frac{\xi^3(\xi^3)^T}{\|\xi^3\|^2} + 2|A_{12}|\frac{\xi^i(\xi^i)^T}{\|\xi^i\|^2} \end{aligned}$$

avec $i = 2$ *ou* $i = 4$ *suivant le signe de* A_{12}. *Les coefficients sont positifs et leur somme vaut* $\mathrm{Tr}(A) = 1$, *donc* $A \in \mathrm{Conv}((A^i)_{i=1,\dots,4})$.

5.a Les matrices $\left(\frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2}\right)_{\xi\in S_p}$ sont dans $\mathcal{M}$ et donc une combinaison convexe de ces matrices est dans $\mathcal{M}$, ce qui montre que $D_p \subset D$. L'application Ψ étant linéaire, l'image de $D_p = \mathrm{Conv}\left(\left(\frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2}\right)_{\xi\in S_p}\right)$ par Ψ est $\mathrm{Conv}\left(\Psi\left(\frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2}\right)_{\xi\in S_p}\right)$. Si on note $w_\xi = \Psi\left(\frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2}\right)$, D_p est donc le polygône convexe de sommets $(w_\xi)_{\xi\in S_p}$. Noter que les sommets w_p sont sur le cercle ∂D.

5.b Puisque $w \in D \setminus D_p$, la projection $\pi_p(w)$ de w sur le D_p est sur le bord de D_p, et donc nécessairement sur un des côtés du polygône. Par conséquent, $\pi_p(w)$ est nécessairement la combinaison convexe de deux sommets de D_p: w_ξ et $w_{\xi'}$ où $\xi,\ \xi' \in S_p$, avec les notations de la question précédente. Autrement dit, il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que

$$\pi_p(w) = \lambda w_\xi + (1-\lambda) w_{\xi'}.$$

5.c On a:

$$\begin{aligned} \Pi_p(A) &= \Psi^{-1}(\pi_p(w)) \\ &= \Psi^{-1}(\lambda w_\xi + (1-\lambda)w_{\xi'}) \\ &= \lambda\Psi^{-1}(w_\xi) + (1-\lambda)\Psi^{-1}(w_{\xi'}) \\ &= \lambda\frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2} + (1-\lambda)\frac{\xi'(\xi')^T}{\|\xi'\|^2}. \end{aligned}$$

La matrice $\Pi_p(A)$ est une combinaison convexe de $\frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2}$ et de $\frac{\xi'(\xi')^T}{\|\xi'\|^2}$.

5.d Il suffit de faire un dessin, et de se souvenir que $w \in D\setminus D_p$. Noter que $\theta \in [0, \pi/2]$ puisqu'on a vu dans la Section 4 que pour $p = 1$, D_1 est le carré de sommets $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Pour $p \geq 1$, D_p contient donc au moins ces sommets.

5.e C'est une conséquence immédiate de la question 3.d, puisque $\Psi^{-1}(w_\xi) = \frac{\xi\xi^T}{\|\xi\|^2}$.

5.f On a:

$$\begin{aligned}\|\pi_p(w) - w\| &\leq 1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 1 - \cos(\beta) \\ &\leq \frac{\beta^2}{2},\end{aligned}$$

par une inégalité bien connue.

5.g Il suffit de faire un dessin pour voir que $\tan\beta = 1/p$ dans ce cas. La conclusion découle de l'inégalité $\tan x \geq x$ pour $x \in [0, \pi/2]$.

5.h On note $A = \frac{a(x)}{\mathrm{Tr}(a(x))}$ et $w = \Psi(A)$. Remarquer que $A \in \mathcal{M}$. En utilisant la question 1.3.b, on a

$$\begin{aligned}\|A - \Pi_p(A)\|_F &= \frac{1}{\sqrt{2}}\|\Psi(A) - \Psi(\Pi_p(A))\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\|w - \pi_p(w)\| \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}\,p^2},\end{aligned}$$

d'où le résultat avec $C_3 = \sqrt{2}/4$.

6.a Un développement limité en temps donne :

$$\left|\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\delta t} - \frac{\partial v}{\partial t}(t_n, x_i)\right| \leq \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right\|_{L^\infty} \delta t.$$

Ensuite, pour l'opérateur en espace, on a en utilisant (2) et (3):

$$\left|\mathrm{Tr}(a(x_i)) \sum_{\xi \in S_p} \gamma_\xi(x_i) \frac{W_{i+\xi}^n - 2W_i^n + W_{i-\xi}^n}{h^2\|\xi\|^2} - \mathrm{Tr}\left(a(x_i) D^2 v(t_n, x_i)\right)\right| \leq \mathrm{Tr}(a(x_i))(C_1 h^2 p^2 + C_2 C_3/p^2),$$

où les constantes C_1 et C_2 dépendent de normes L^∞ de v (cf. question 2). Par conséquent, puisque

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_n, x_i) - \mathrm{Tr}\left(a(x_i) D^2 v(t_n, x_i)\right) = 0,$$

on a:

$$\begin{aligned}|\epsilon_i^n| &= \left|\epsilon_i^n - \frac{\partial v}{\partial t}(t_n, x_i) + \mathrm{Tr}\left(a(x_i) D^2 v(t_n, x_i)\right)\right| \\ &\leq \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right\|_{L^\infty} \delta t + \mathrm{Tr}(a(x_i))(C_1 h^2 p^2 + C_2 C_3/p^2).\end{aligned}$$

On obtient donc bien une erreur de consistance en $O(\delta t + h^2p^2 + 1/p^2)$.

6.b Pour équilibrer les erreurs h^2p^2 et $1/p^2$, on voit qu'il faut prendre $p = 1/\sqrt{h}$, auquel cas l'erreur de consistance est en $O(\delta t + h)$. L'ordre de consistance en h est donc 1 en général. Remarquer cependant que si, pour p fixé, $a(x)$ est tel que $\Psi\left(a(x)/\mathrm{Tr}(a(x))\right) \in D_p$ pour tout x, alors l'erreur en $1/p^2$ disparaît et le schéma est consistant d'ordre $O(\delta t + h^2)$ (p étant fixé indépendemment de h dans ce cas).

6.c Pour avoir la stabilité L^∞, il suffit de vérifier la positivité des termes de la matrice R telle que $V^{n+1} = RV^n$. On vérifie facilement que les coefficients de R sont positifs sous la condition CFL : pour tout $x_i \in G_h$,

$$\delta t \leq \frac{h^2p^2}{2\,\mathrm{Tr}(a(x_i))}.$$

7 Reprendre les résultats du cours et vérifier que $\mathrm{Id} + \delta t M$ est une M-matrice.

8 Reprendre les résultats du cours. On peut par exemple proposer un schéma de splitting, avec un pas d'Euler implicite avec upwinding pour discrétiser les termes d'advection, et un pas de projection sur les fonctions supérieures à φ.