

---

## Méthodes Déterministes en Finance

### EXAMEN - 8 FÉVRIER 2010

---

Durée : 2 heures.

Les notes de cours manuscrites sont autorisées. Les questions pourront être traitées indépendamment les unes des autres.

### Exercice I : Option américano-asiatique

On considère une option américano-asiatique portant sur un actif  $S_t$  et sa moyenne  $A_t := \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$ . Le prix de l'option à échéance est  $\varphi(S_T, A_T) = (A_T - S_T)_+$  (cas du call avec strike flottant). Le détenteur du contrat a le droit d'exercer à tout moment pour un payoff de valeur

$$\varphi(S_t, A_t) = (A_t - S_t)_+.$$

On montre que le prix d'une telle option est de la forme  $V(t, S_t, A_t)$  où  $V = V(t, S, A)$  est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\min \left( -\partial_t V - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS} V - rS \partial_S V - \frac{S-A}{t} \partial_A V + rV, V - \varphi(S, A) \right) = 0, \\ t \in (0, T), S > 0, A > 0, \quad (1a)$$

$$V(T, S, A) = \varphi(S, A), \quad S > 0, A > 0, \quad (1b)$$

où  $r > 0$  représente un taux d'intérêt et  $\sigma > 0$  une volatilité.

**I.1** Montrer que la solution  $V$  du problème (1) peut se mettre sous la forme  $V(T-t, S, A) = Sf(t, x)$  avec  $x := -\frac{A}{S}$  et  $f$  solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\min \left( \partial_t f - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} f + \left( \frac{1+x}{T-t} + rx \right) \partial_x f, f - \psi(x) \right) = 0, \\ t \in (0, T), x < 0, \quad (2a)$$

$$f(0, x) = \psi(x), \quad x < 0, \quad (2b)$$

avec  $\psi(x) := (-1 - x)_+$ .

**I.2** On cherche une condition aux limites raisonnable pour (2), lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . Supposons dans un premier temps que l'obstacle n'intervienne pas, et considérons donc la solution du problème suivant :

$$\partial_t g - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} g + \left( \frac{1+x}{T-t} + rx \right) \partial_x g = 0, t \in (0, T), x < 0, \quad (3a)$$

$$g(0, x) = -1 - x. \quad (3b)$$

Trouver une solution particulière de (3) sous la forme  $g(t, x) = a(t)x + b(t)$  (où les fonctions  $a(t)$  et  $b(t)$  sont à déterminer en fonction du temps  $t$ , de  $r$  et de  $T$ ).

Vérifier que pour  $x \leq -1$ ,  $g(t, x) \leq \psi(x)$ . En déduire une condition aux limites à gauche pour la solution  $f$  du problème (2).

**I.3** Proposer un schéma numérique aux différences finies stable pour (2), sur un domaine borné  $[X_{min}, X_{max}]$  avec  $X_{min} < -1 < X_{max} < 0$ . En  $x = X_{max}$ , on considèrera une condition aux limites de Neumann homogène :  $\partial_x f = 0$  (et on précisera la manière pratique de l'implémenter). On étudiera en détail la stabilité du schéma.

## Exercice II : Estimations d'erreur

On considère la solution  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  du problème

$$\begin{cases} b \cdot \nabla u - \Delta u = f, & \text{sur } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

où  $\Omega$  est un ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de  $L^2(\Omega)$  et  $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction bornée. On introduit la forme bilinéaire sur  $H_0^1(\Omega)$  :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (b \cdot \nabla u v + \nabla u \cdot \nabla v)$$

et la forme linéaire sur  $L^2(\Omega)$  :

$$l(v) = \int_{\Omega} f v.$$

**II.1** Rappeler une formulation variationnelle adaptée au problème (4). Montrer que si  $\|b\|_{L^\infty}$ , ou bien  $\|\operatorname{div} b\|_{L^\infty}$  sont suffisamment petits, alors (4) admet une unique solution. On supposera dans la suite qu'une de ces hypothèses sur  $b$  est vérifiée.

**II.2** Expliquer comment on discrétise le problème (4) par une méthode d'éléments finis  $P^k$  ( $k \geq 1$ ), sur un maillage de pas de discrétisation  $h$ . On note  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  l'espace d'éléments finis, et  $u_h$  la solution éléments finis. Montrer que pour une telle discrétisation, on a l'estimée d'erreur

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - u_h)|^2 \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

On pourra utiliser le fait que, puisque  $f \in L^2(\Omega)$ , la solution  $u$  de (4) est dans  $H^2(\Omega)$ , et l'estimée d'interpolation :

$$\exists C > 0, \forall v \in H^2(\Omega), \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

## Partie II.A : Erreur sur une fonctionnelle $s(u)$

On suppose que la quantité que l'on veut en fait calculer n'est pas  $u$  mais

$$s(u) = \int_{\Omega} g(x)u(x) dx \quad (5)$$

où  $g$  est une fonction de  $L^2(\Omega)$  donnée.

**II.3** Montrer que  $s$  est une application continue de  $H_0^1(\Omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . En déduire une première estimation de l'erreur  $|s(u) - s(u_h)|$ .

**II.4** On introduit la solution  $\psi$  du problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(b\psi) - \Delta\psi = g, & \text{sur } \Omega, \\ \psi = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6)$$

et on note  $\psi_h \in V_h$  l'approximation de  $\psi$  obtenue par discrétisation par éléments finis  $P^k$  du problème (6), en utilisant le même espace d'approximation  $V_h$  que dans les questions précédentes. Montrer que

$$s(u) - s(u_h) = a(u - u_h, \psi - \psi_h).$$

**II.5** En déduire l'estimation suivante :  $\exists C > 0$ ,

$$|s(u) - s(u_h)| \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^2(\Omega)}.$$

Comparer avec l'estimation obtenue en II.3.

**II.6** On suppose dans cette question que  $d = 1$  et que  $b = 0$ . On s'intéresse à la solution  $u(x^*)$  en un point  $x^* \in \Omega$ . On introduit  $\bar{\psi}$  solution du problème

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2} \bar{\psi} = \delta_{x^*}, & \text{sur } \Omega, \\ \bar{\psi} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7)$$

où  $\delta_{x^*}$  désigne un Dirac en  $x^*$ . On suppose que  $x^*$  est un noeud du maillage du domaine  $\Omega$ , et que l'on utilise toujours une discrétisation par éléments finis  $P^k$  de (4). Montrer que  $\bar{\psi} \in V_h$  et en déduire que

$$u_h(x^*) = u(x^*).$$

## Partie II.B : Erreurs *a posteriori*

Dans cette partie, on est intéressé à estimer *localement* l'erreur introduite par la discrétisation par éléments finis *en utilisant seulement la solution approchée  $u_h$* . On

a pour cela besoin d'introduire quelques notations supplémentaires. On suppose dans cette partie pour simplifier que

$$d = 2 \text{ et } b = 0,$$

de sorte que  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ .

On note  $\mathcal{T}_h = \{K_i, i \in \{1, \dots, I\}\}$  le maillage du domaine  $\Omega$  par des triangles ( $K_i$ ). On introduit l'estimateur d'erreur local associé à l'élément  $K \in \mathcal{T}_h$  :

$$\eta_K = \left( h_K^2 \|\Delta u_h + f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{S \in \partial K \setminus \partial \Omega} h_S \left\| \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(S)}^2 \right)^{1/2},$$

où  $\sum_{S \in \partial K \setminus \partial \Omega}$  désigne une somme sur les côtés  $S$  de  $K$  qui ne sont pas inclus dans le bord du domaine,  $h_K$  désigne le diamètre de l'élément  $K$  et  $h_S$  la longueur de l'arête  $S$ . De plus,

$$\left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] = \frac{\partial u_h|_K}{\partial n} - \frac{\partial u_h|_{K'}}{\partial n}$$

désigne le saut de la dérivée normale de  $u_h$  sur l'arête  $S = \partial K \cap \partial K'$  commune aux éléments  $K$  et  $K'$ , la normale  $n$  étant par convention supposée sortante à l'élément  $K$ . Noter que le choix de l'orientation de  $n$  n'influe pas sur la valeur de  $\eta_K$ .

**II.7** Montrer que pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$a(u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( - \int_K \Delta u_h v + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] v \right).$$

En déduire que pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  et pour tout  $v_h \in V_h$ ,

$$a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \int_K (f + \Delta u_h)(v - v_h) - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] (v - v_h) \right). \quad (8)$$

On admet dans la suite qu'il existe un opérateur de projection local  $R_h : V \mapsto V_h$  vérifiant : il existe  $C > 0$  tel que pour tout élément  $K$ , pour toute arête  $S$  et pour tout  $v \in V_h$ ,

$$\|v - R_h v\|_{L^2(K)} \leq C h_K \|v\|_{H^1(\Delta K)}$$

$$\|v - R_h v\|_{L^2(S)} \leq C h_S^{1/2} \|v\|_{H^1(\Delta S)}$$

où  $\Delta K$  désigne l'union des éléments du maillage partageant au moins un noeud avec l'élément  $K$ , et  $\Delta S$  désigne l'union des éléments du maillage partageant au moins un noeud avec l'arête  $S$ . Noter que si  $S \subset \partial K$  est une arête de  $K$ , alors  $\Delta S \subset \Delta K$ .

**II.8** En choisissant  $v_h = R_h(v)$  dans (8), montrer que

$$a(u - u_h, v) \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $f$ ,  $u$ ,  $u_h$ ,  $h_K$  et  $h_S$ . En déduire que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}. \quad (9)$$

On appelle une telle estimation d'erreur une estimation *a posteriori*, car elle ne fait intervenir que des quantités calculables numériquement (le vérifier).

**II.9** On admet que l'on peut montrer une inégalité inverse du type :  $\eta_K$  est majoré par l'erreur  $\|u - u_h\|_{H^1(\Delta_K)}$ . L'estimateur  $\eta_K$  est donc un bon estimateur de l'erreur locale. Expliquer l'intérêt de l'estimation a posteriori (9) d'un point de vue pratique.