Méthodes Déterministes en Finance

Examen - 8 Février 2010

Durée : 2 heures.

Les notes de cours manuscrites sont autorisées. Les questions pourront être traitées indépendamment les unes des autres.

Exercice I : Option américano-asiatique

On considère une option américano-asiatique portant sur un actif S_t et sa moyenne $A_t := \frac{1}{t}\int_0^t S_\tau d\tau$. Le prix de l'option à échéance est $\varphi(S_T, A_T) = (A_T - S_T)_+$ (cas du call avec strike flottant). Le détenteur du contrat a le droit d'exercer à tout moment pour un payoff de valeur

$$\varphi(S_t, A_t) = (A_t - S_t)_+.$$

On montre que le prix d'une telle option est de la forme $V(t, S_t, A_t)$ où $V = V(t, S, A)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\min\left(-\partial_t V - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{SS} V - rS\partial_S V - \frac{S-A}{t}\partial_A V + rV,\ V - \varphi(S,A)\right) = 0,$$
$$t \in (0,T),\ S > 0,\ A > 0, \quad \text{(1a)}$$

$$V(T,S,A) = \varphi(S,A), \quad S > 0,\ A > 0, \quad \text{(1b)}$$

où $r > 0$ représente un taux d'intérêt et $\sigma > 0$ une volatilité.

I.1 Montrer que la solution V du problème (1) peut se mettre sous la forme $V(T-t, S, A) = Sf(t,x)$ avec $x := -\frac{A}{S}$ et f solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\min\left(\partial_t f - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} f + \left(\frac{1+x}{T-t} + rx\right)\partial_x f,\ f - \psi(x)\right) = 0,$$
$$t \in (0,T),\ x < 0, \quad \text{(2a)}$$

$$f(0,x) = \psi(x), \quad x < 0, \quad \text{(2b)}$$

avec $\psi(x) := (-1-x)_+$.

I.2 On cherche une condition aux limites raisonnable pour (2), lorsque $x \to -\infty$. Supposons dans un premier temps que l'obstacle n'intervienne pas, et considérons donc la solution du problème suivant :

$$\partial_t g - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} g + \left(\frac{1+x}{T-t} + rx\right)\partial_x g = 0, t \in (0,T), x < 0, \quad \text{(3a)}$$

$$g(0,x) = -1 - x. \quad \text{(3b)}$$

Trouver une solution particulière de (3) sous la forme $g(t,x) = a(t)x + b(t)$ (où les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont à déterminer en fonction du temps t, de r et de T).

Vérifier que pour $x \leq -1$, $g(t,x) \leq \psi(x)$. En déduire une condition aux limites à gauche pour la solution f du problème (2).

I.3 Proposer un schéma numérique aux différences finies stable pour (2), sur un domaine borné $[X_{min}, X_{max}]$ avec $X_{min} < -1 < X_{max} < 0$. En $x = X_{max}$, on considèrera une condition aux limites de Neumann homogène : $\partial_x f = 0$ (et on précisera la manière pratique de l'implémenter). On étudiera en détail la stabilité du schéma.

Exercice II : Estimations d'erreur

On considère la solution $u : \Omega \to \mathbb{R}$ du problème

$$\begin{cases} b \cdot \nabla u - \Delta u = f, \text{ sur } \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

où Ω est un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de $L^2(\Omega)$ et $b : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction bornée. On introduit la forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega (b \cdot \nabla u\, v + \nabla u \cdot \nabla v)$$

et la forme linéaire sur $L^2(\Omega)$:

$$l(v) = \int_\Omega fv.$$

II.1 Rappeler une formulation variationnelle adaptée au problème (4). Montrer que si $\|b\|_{L^\infty}$, ou bien $\|\operatorname{div} b\|_{L^\infty}$ sont suffisamment petits, alors (4) admet une unique solution. On supposera dans la suite qu'une de ces hypothèses sur b est vérifiée.

II.2 Expliquer comment on discrétise le problème (4) par une méthode d'éléments finis P^k ($k \geq 1$), sur un maillage de pas de discrétisation h. On note $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ l'espace d'éléments finis, et u_h la solution éléments finis. Montrer que pour une telle discrétisation, on a l'estimée d'erreur

$$\int_\Omega |\nabla(u-u_h)|^2 \leq Ch^2 \|u\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

On pourra utiliser le fait que, puisque $f \in L^2(\Omega)$, la solution u de (4) est dans $H^2(\Omega)$, et l'estimée d'interpolation :

$$\exists C > 0, \forall v \in H^2(\Omega),\ \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Partie II.A : Erreur sur une fonctionelle $s(u)$

On suppose que la quantité que l'on veut en fait calculer n'est pas u mais

$$s(u) = \int_{\Omega} g(x)u(x)\,dx \tag{5}$$

où g est une fonction de $L^2(\Omega)$ donnée.

II.3 Montrer que s est une application continue de $H_0^1(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. En déduire une première estimation de l'erreur $|s(u) - s(u_h)|$.

II.4 On introduit la solution ψ du problème suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(b\psi) - \Delta\psi = g, \text{ sur } \Omega, \\ \psi = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

et on note $\psi_h \in V_h$ l'approximation de ψ obtenue par discrétisation par éléments finis P^k du problème (6), en utilisant le même espace d'approximation V_h que dans les questions précédentes. Montrer que

$$s(u) - s(u_h) = a(u - u_h, \psi - \psi_h).$$

II.5 En déduire l'estimation suivante : $\exists C > 0$,

$$|s(u) - s(u_h)| \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^2(\Omega)}.$$

Comparer avec l'estimation obtenue en II.3.

II.6 On suppose dans cette question que $d = 1$ et que $b = 0$. On s'intéresse à la solution $u(x^*)$ en un point $x^* \in \Omega$. On introduit $\overline{\psi}$ solution du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2}\overline{\psi} = \delta_{x^*}, \text{ sur } \Omega, \\ \overline{\psi} = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

où δ_{x^*} désigne un Dirac en x^*. On suppose que x^* est un noeud du maillage du domaine Ω, et que l'on utilise toujours une discrétisation par éléments finis P^k de (4). Montrer que $\overline{\psi} \in V_h$ et en déduire que

$$u_h(x^*) = u(x^*).$$

Partie II.B : Erreurs *a posteriori*

Dans cette partie, on est intéressé à estimer *localement* l'erreur introduite par la discrétisation par éléments finis *en utilisant seulement la solution approchée* u_h. On a pour cela besoin d'introduire quelques notations supplémentaires. On suppose dans cette partie pour simplifier que

$$d = 2 \text{ et } b = 0,$$

de sorte que $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.

On note $\mathcal{T}_h = \{K_i, i \in \{1,\dots,I\}\}$ le maillage du domaine Ω par des triangles (K_i). On introduit l'estimateur d'erreur local associé à l'élément $K \in \mathcal{T}_h$:

$$\eta_K = \left(h_K^2 \|\Delta u_h + f\|^2_{L^2(K)} + \sum_{S \in \partial K \setminus \partial\Omega} h_S \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|^2_{L^2(S)} \right)^{1/2},$$

où $\sum_{S \in \partial K \setminus \partial\Omega}$ désigne une somme sur les côtés S de K qui ne sont pas inclus dans le bord du domaine, h_K désigne le diamètre de l'élément K et h_S la longueur de l'arête S. De plus,

$$\left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] = \frac{\partial u_h|_K}{\partial n} - \frac{\partial u_h|_{K'}}{\partial n}$$

désigne le saut de la dérivée normale de u_h sur l'arête $S = \partial K \cap \partial K'$ commune aux éléments K et K', la normale n étant par convention supposée sortante à l'élément K. Noter que le choix de l'orientation de n n'influe pas sur la valeur de η_K.

II.7 Montrer que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(-\int_K \Delta u_h v + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] v \right).$$

En déduire que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $v_h \in V_h$,

$$a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (f + \Delta u_h)(v - v_h) - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] (v - v_h) \right). \tag{8}$$

On admet dans la suite qu'il existe un opérateur de projection local $R_h : V \mapsto V_h$ vérifiant : il existe $C > 0$ tel que pour tout élément K, pour toute arête S et pour tout $v \in V_h$,

$$\|v - R_h v\|_{L^2(K)} \le C h_K \|v\|_{H^1(\Delta K)}$$

$$\|v - R_h v\|_{L^2(S)} \le C h_S^{1/2} \|v\|_{H^1(\Delta S)}$$

où ΔK désigne l'union des éléments du maillage partageant au moins un noeud avec l'élément K, et ΔS désigne l'union des éléments du maillage partageant au moins un noeud avec l'arête S. Noter que si $S \subset \partial K$ est une arête de K, alors $\Delta S \subset \Delta K$.

II.8 En choisissant $v_h = R_h(v)$ dans (8), montrer que

$$a(u - u_h, v) \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2},$$

où C est une constante indépendante de f, u, u_h, h_K et h_S. En déduire que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}. \tag{9}$$

On appelle une telle estimation d'erreur une estimation *a posteriori*, car elle ne fait intervenir que des quantités calculables numériquement (le vérifier).

II.9 On admet que l'on peut montrer une inégalité inverse du type : η_K est majoré par l'erreur $\|u - u_h\|_{H^1(\Delta K)}$. L'estimateur η_K est donc un bon estimateur de l'erreur locale. Expliquer l'intérêt de l'estimation a posteriori (9) d'un point de vue pratique.