Méthodes Déterministes en Finance

Examen - 8 Février 2010

Corrigé partiel

Exercice I : Option américano-asiatique

I.1 Notons $v(t,S,A) = V(T-t,S,A)$, qui est solution de

$$\min\left(\partial_t v - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{SS} v - rS\partial_S v - \frac{S-A}{T-t}\partial_A v + rv,\ v - \varphi(S,A)\right) = 0,$$
$$v(0,S,A) = \varphi(S,A).$$

On écrit alors $v(t,S,A) = Sf(t,-\frac{A}{S})$, et en utilisant que $\partial_S(x) = -\frac{x}{S}$, on obtient $\partial_t v = S\partial_t f$, $\partial_S v = -x\partial_x f + f$, $\partial_{SS} v = \frac{x^2}{S}\partial_{xx} f$, $\partial_A v = -\partial_x f$, donc $-\frac{S-A}{T-t}\partial_A v = S\frac{1+x}{T-t}\partial_x f$, et enfin $\varphi(S,A) = S(-1-x)_+ = S\psi(x)$. Après simplification par $S>0$, on obtient l'EDP désirée.

I.2 $g(0,x) = a(0)x + b(0) = -1-x$, pour $x<0$, impose que $a(0) = b(0) = -1$. Puis en remplacant dans l'équation (3) on obtient $\left(\dot a + (r + \frac{1}{T-t})a\right)x + (\dot b + \frac{1}{T-t}a) = 0$, pour tout $x<0$ et $t \in (0,T)$. A $t>0$ fixé, il faut donc annuler les coefficients du polynôme en x, soit

$$\begin{cases} \dot a + \left(r + \dfrac{1}{T-t}\right) a = 0, \\ \dot b + \dfrac{1}{T-t} a = 0. \end{cases} \tag{1}$$

En utilisant les conditions initiales à $t=0$, la première équation se résout en $a(t) = -\exp\left(-rt + \ln\left(\frac{T-t}{T}\right)\right) = -e^{-rt}\frac{T-t}{T}$, la deuxième en $b(t) = -1 + (1-e^{-rt})/(rT)$. Finalement,

$$g(t,x) = -e^{-rt}\left(1 - \frac{t}{T}\right) x - 1 + \frac{1-e^{-rt}}{rT}.$$

Le calcul montre alors que $\partial_t g(t,x) = \frac{e^{-rt}}{T}(1+x) + re^{-rt}(1-\frac{t}{T})x$. Comme $\partial_t g \le 0$ pour $x \le -1$, $g(t,x) \le g(0,x) = \psi(x)$ pour $x \le -1$. Puisque la solution $f(t,x)$ doit vérifier $f(t,x) \ge \psi(x)$, il est donc raisonnable de prendre $f(t,x) = \psi(x)$ pour $x \to -\infty$. Une condition aux limites raisonnable en $x = X_{min}$ ($X_{min} \le -1$ et X_{min} tendant vers $-\infty$) est donc $f(t, X_{min}) = \psi(X_{min})$.

I.3 On peut proposer un schéma d'Euler implicite de type splitting, avec un décentrage pour la discrétisation du terme d'advection pour assurer la stabilité. Un schéma explicite risquerait de ne jamais être stable à cause du terme d'ordre deux ainsi que, ici, du facteur $b(t,x) = rx + \frac{1+x}{T-t}$ qui n'est pas borné lorsque $t \to T$. On pourrait aussi considérer un schéma d'Euler implicite sur le problème original, sans splitting, et utiliser une méthode de type Newton pour résoudre le problème non-linéaire (comme expliqué dans le cours).

On pose $h = (X_{max} - X_{min})/(I+1)$, $x_j = X_{min} + jh$, $j = 0, \ldots, I+1$, $\delta t = T/N$, $t_n = n\delta t$, (avec $N, I \geq 1$).

Commencons par considérer $\bar{f}_j^{n+1}$ solution d'un schéma implicite pour le problème sans obstacle :

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{f}_j^{n+1} - f_j^n}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x_j^2 \left(\frac{-\bar{f}_{j-1}^{n+1} + 2\bar{f}_j^{n+1} - \bar{f}_{j+1}^{n+1}}{h^2} \right) & \\
+ (b_j^n)^+ \frac{\bar{f}_j^{n+1} - \bar{f}_{j-1}^{n+1}}{h} - (b_j^n)^- \frac{\bar{f}_{j+1}^{n+1} - \bar{f}_j^{n+1}}{h} &= 0, \\
j = 1, \ldots, I, \quad n = 0, \ldots, N-1 & \\
\bar{f}_0^{n+1} = \psi(X_{min}), \ \bar{f}_{I+1}^{n+1} = \bar{f}_I^{n+1}, \quad n = 0, \ldots, N, &
\end{aligned}$$

avec les notations $b_j^n := rx_j + \frac{1+x_j}{T-t_n}$, $x^+ := \max(x,0)$, $x^- := \max(-x,0)$. Pour la condition aux limites de Neumann en $x = X_{max}$, on discrétise la condition $\partial_x f(t, X_{max}) = 0$ par $\frac{f_{I+1}^n - f_I^n}{h} = 0$. Pour $j = I$, on obtient donc

$$\frac{\bar{f}_I^{n+1} - f_I^n}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x_j^2 \left(\frac{-\bar{f}_{I-1}^{n+1} + \bar{f}_I^{n+1}}{h^2} \right) + (b_I^n)^+ \frac{\bar{f}_I^{n+1} - \bar{f}_{I-1}^{n+1}}{h} = 0.$$

Le schéma se met alors sous la forme $A\bar{f}^{n+1} = f^n$. On peut vérifier que A est une M-matrice associée à un coefficient $\delta \geq 1$ (coefficient de domination de la diagonale). En particulier, $\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\delta} \leq 1$.

Puis on considère le schéma suivant pour (2) :

$$f_j^{n+1} := \max\left(\bar{f}_j^{n+1}, \psi(x_j)\right).$$

Pour l'étude de la stabilité, introduisant le vecteur $h = (\psi(x_j))$ de sorte que $f^{n+1} = \max(A^{-1}f^n, h)$. On a :

$$\begin{aligned}
\|f^{n+1}\|_\infty &\leq \max(\|A^{-1}f^n\|_\infty, \|h\|_\infty) \\
&\leq \max(\|f^n\|_\infty, \|h\|_\infty),
\end{aligned}$$

et comme $f^0 = h$, on conclut par récurrence que $\|f^n\|_\infty \leq \|h\|_\infty \leq \|\psi\|_{L^\infty([X_{min}, X_{max}])}$. Le schéma est donc inconditionnellement stable en norme L^∞.

Exercice II : Estimations d'erreur

II.1 Une formulation variationnelle naturelle de ce problème est la suivante : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u,v) = l(v).$$

On munit l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ du produit scalaire $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$. Comme b est borné, il est facile de vérifier par Cauchy-Schwarz que la forme a est continue. De même, l est une forme continue. Pour la coercivité de a, on a :

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega b \cdot \nabla u\, u + \int_\Omega |\nabla u|^2 \\
&\geq -\|b\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla u|^2 \\
&\geq (1 - C\|b\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_\Omega |\nabla u|^2,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Poincaré : pour $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'où la coercivité si

$$\|b\|_{L^\infty(\Omega)} < 1/C.$$

Alternativement, en supposant que $\operatorname{div} b$ est une fonction bornée, on peut aussi obtenir la coercivité en écrivant :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega b \cdot \nabla u\, u &= \frac{1}{2} \int_\Omega b \cdot \nabla |u|^2 \\
&= -\frac{1}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} b)\, |u|^2
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\geq -\frac{1}{2} \|\operatorname{div} b\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla u|^2 \\
&\geq \left(1 - \frac{C^2}{2} \|\operatorname{div} b\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2
\end{aligned}$$

d'où la coercivité si

$$\|\operatorname{div} b\|_{L^\infty(\Omega)} < 2/C^2.$$

En utilisant ensuite le Lemme de Lax Milgram, on sait que le problème variationnel admet une unique solution.

II.2 Soit V_h l'espace d'éléments finis P^k, c'est-à-dire l'espace des fonctions continues, qui sont polynomiales (de degré k) par morceaux sur un maillage du domaine Ω. Le problème discrétisé s'écrit : trouver $u_h \in V_h$ tel que pour tout $v_h \in V_h$,

$$a(u_h, v_h) = l(v_h).$$

Comme $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, on a, pour tout $v_h \in V_h$,

$$a(u - u_h, v_h) = 0$$

et donc

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h).$$

On en déduit facilement que pour tout $v_h \in V_h$,

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(u - u_h)|^2 \leq C \left(\int_\Omega |\nabla(u - u_h)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla(u - v_h)|^2 \right)^{1/2},$$

où α et C désignent respectivement la constante de coercivité et de continuité de la forme bilinéaire a. Donc, en prenant l'infimum sur les $v_h \in V_h$ et en utilisant le fait que $u \in H^2(\Omega)$,

$$\left(\int_\Omega |\nabla(u - u_h)|^2 \right)^{1/2} \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

II.3 L'application $s : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ est bien définie et linéaire. Il suffit donc de montrer sa continuité en 0. Par Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |s(u)| &\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |s(u) - s(u_h)| &\leq C \left(\int_\Omega |\nabla(u - u_h)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

en utilisant le résultat de la questions précédente.

II.4 On a, par intégration par parties, en utilisant le fait que $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\begin{aligned} s(u) - s(u_h) &= \int_\Omega g(u - u_h) \\ &= -\int_\Omega (\operatorname{div}(b\psi) + \Delta\psi)(u - u_h) \\ &= \int_\Omega (\psi\, b \cdot \nabla(u - u_h) + \nabla\psi \cdot \nabla(u - u_h)) \\ &= a(u - u_h, \psi) \\ &= a(u - u_h, \psi - \psi_h) \end{aligned}$$

puisque $a(u - u_h, v_h) = 0$ pour tout $v_h \in V_h$.

II.5 La fonction g est une fonction de $L^2(\Omega)$ et donc $\psi \in H^2(\Omega)$. On a donc l'estimée d'erreur (comme dans la question II.2) :

$$\left(\int_\Omega |\nabla(\psi - \psi_h)|^2 \right)^{1/2} \leq Ch\|\psi\|_{H^2(\Omega)}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}|s(u)-s(u_h)| &= |a(u-u_h,\psi-\psi_h)|\\ &\le C\left(\int_\Omega |\nabla(\psi-\psi_h)|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla(u-u_h)|^2\right)^{1/2}\\ &\le Ch^2\|u\|_{H^2(\Omega)}\|\psi\|_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

On obtient donc une convergence en h^2 et non pas en h comme dans II.3. La raison pour laquelle le résultat en II.3 est sous-optimal est que la fonction s est en fait continue de $L^2(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ (et non pas de $H^1_0(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$). Et donc c'est l'erreur $\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$ qui majore la différence $|s(u)-s(u_h)|$ et non pas l'erreur $\|u-u_h\|_{H^1_0(\Omega)}$. Il est naturel que l'erreur en norme L^2 soit plus petite que l'erreur en norme H^1_0. On peut en fait montrer par des techniques similaires à celle utilisée ci-dessus que l'erreur L^2 est bien en h^2 (c'est le lemme d'Aubin-Nitsche).

II.6 Ici, ce qui joue le rôle de la fonction g dans la fonctionnelle s, c'est la fonction Dirac en x^*. En dimension 1, le domaine Ω est un intervalle (a,b). Il est clair que $\overline{\psi} \in V_h$ puisque la solution de (4) est une fonction continue affine sur (a,x^*) et sur (x^*,b). Par conséquent on a, en s'inspirant des calculs ci-dessus,

$$\begin{aligned}u(x^*)-u_h(x^*) &= -\int_\Omega \overline{\psi}''(u-u_h)\\ &= \int_\Omega \overline{\psi}'(u-u_h)'\\ &= a(u-u_h,\overline{\psi})\\ &= 0.\end{aligned}$$

II.7 On a

$$\begin{aligned}a(u_h,v) &= \int_\Omega \nabla u_h\cdot\nabla v\\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K \nabla u_h\cdot\nabla v\\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(-\int_K \Delta u_h v + \int_{\partial K\setminus\partial\Omega}\frac{\partial u_h}{\partial n}v\right)\\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(-\int_K \Delta u_h v + \frac{1}{2}\int_{\partial K\setminus\partial\Omega}\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]v\right),\end{aligned}$$

la dernière égalité étant basée sur le fait qu'une arête intérieure appartient à exactement deux éléments.

On a donc

$$\begin{aligned} a(u-u_h,v) &= a(u-u_h, v-v_h) \\ &= a(u, v-v_h) - a(u_h, v-v_h) \\ &= \int_\Omega f(v-v_h) + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\int_K \Delta u_h(v-v_h) - \frac{1}{2}\int_{\partial K\setminus\partial\Omega}\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right](v-v_h)\right) \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\int_K (f+\Delta u_h)(v-v_h) - \frac{1}{2}\int_{\partial K\setminus\partial\Omega}\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right](v-v_h)\right). \end{aligned}$$

II.8 En prenant $v_h = R_h(v)$ comme fonction test, on obtient (la constante C pouvant changer de valeur d'une ligne à l'autre, mais ne dépendant pas de f, u, u_h, v, h_K ni h_S) :

$$\begin{aligned} a(u-u_h,v) &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\int_K (f+\Delta u_h)(v-R_h(v)) - \frac{1}{2}\int_{\partial K\setminus\partial\Omega}\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right](v-R_h(v))\right) \\ &\le \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\|f+\Delta u_h\|_{L^2(K)}\|v-R_h(v)\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2}\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(\partial K\setminus\partial\Omega)}\|v-R_h(v)\|_{L^2(\partial K\setminus\partial\Omega)}\right) \\ &\le C\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(h_K\|f+\Delta u_h\|_{L^2(K)}\|v\|_{H^1(\Delta K)} + \sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega} h_S^{1/2}\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(S)}\|v\|_{H^1(\Delta S)}\right) \\ &\le C\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|v\|_{H^1(\Delta K)}\left(h_K\|f+\Delta u_h\|_{L^2(K)} + \sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega} h_S^{1/2}\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(S)}\right) \\ &\le C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|v\|^2_{H^1(\Delta K)}\right)^{1/2}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(h_K\|f+\Delta u_h\|_{L^2(K)} + \sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega} h_S^{1/2}\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|_{L^2(S)}\right)^2\right)^{1/2} \\ &\le C\|v\|_{H^1(\Omega)}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(h_K^2\|f+\Delta u_h\|^2_{L^2(K)} + \sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega} h_S\left\|\left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]\right\|^2_{L^2(S)}\right)\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour passer de la troisième à la quatrième ligne, on a utilisé le fait que si $S \subset \partial K\setminus\partial\Omega$, alors $\Delta S \subset \Delta K$ et donc $\|v\|_{H^1(\Delta S)} \le \|v\|_{H^1(\Delta K)}$. Pour passer de l'avant-dernière à la dernière ligne, on a utilisé le fait qu'un élément K n'appartient qu'à un nombre fini de ΔK. On a donc bien

$$a(u-u_h,v) \le C\|v\|_{H^1(\Omega)}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\eta_K^2\right)^{1/2}.$$

En prenant $v = u - u_h$ dans cette inégalité, et en utilisant la coercivité de la forme bilinéaire a et l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq Ca(u-u_h, u-u_h) \\ &\leq C\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

II.9 L'intérêt d'un tel estimateur est qu'il permet de savoir, en n'utilisant que des quantités calculables numériquement, où sont commises les erreurs. Ainsi, on peut raffiner le maillage de manière adaptative, en ajoutant des mailles là où les erreurs sont les plus importantes, ce qui est nettement moins coûteux qu'un raffinement uniforme.