Méthodes Déterministes en Finance

7 Février 2011

Durée: 3 heures.

Les notes de cours manuscrites sont autorisées. Les questions pourront être traitées indépendamment les unes des autres. Répondez de manière succinte aux questions de cours: l'objectif est de vérifier que vous avez compris et assimilé les notions.

Question de cours 1.

On considère le modèle de Black-Scholes avec volatilité locale. Rappeler en quoi consiste le problème de la calibration de la volatilité. Enoncer et démontrer la formule de Dupire. En quoi cette formule peut être utile pour la calibration de la volatilité ?

Question de cours 2.

Donner une condition suffisante sur la matrice $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ pour que le problème $F(x) = \min(Ax - b, x - g) = 0$ (où $x, g \in \mathbb{R}^I$) soit résoluble par la méthode de Newton. Expliquer en quoi cela peut être utile pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles issue de la finance.

Problème.

On considère une option européenne portant sur un actif S_t et de payoff $\varphi(S_T)$. La valeur de l'option à l'instant $t \in [0, T]$ est $V(t, S_t)$ où $V(t, s)$ est la fonction solution de l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$-\partial_t V - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_{ss} V - rs\partial_s V + rV = 0, \quad t \in (0, T),\ s > 0, \tag{1a}$$

$$V(T, s) = \varphi(s), \quad s > 0. \tag{1b}$$

On s'intéresse à une méthode numérique pour la discrétisation de cette équation aux dérivées partielles.

Dans un premier temps, on considère en outre des conditions aux limites de la forme suivante:

$$V(t, s_{\min}) = V_g(t),$$

$$V(t, s_{\max}) = V_d(t),$$

où V_g et V_d sont des fonctions supposées connues. On cherche donc la fonction $V(t, s)$ pour $t \in [0, T]$ et $s \in [s_{\min}, s_{\max}]$.

Question 1. (i) Proposer un choix raisonnable pour $V_g(t)$ et $V_d(t)$ dans le cas d'un put européen ($\varphi(s) = \max(K - s, 0)$). On supposera que $s_{\min} > 0$ est proche de 0, et $s_{\max}$ est assez grand.

(ii) Proposer un choix raisonnable pour $V_g(t)$ et $V_d(t)$ dans le cas d'un call européen ($\varphi(s) = \max(s - K, 0)$).

(iii) On considère le changement de variable $s = \exp(x)$ et $\tau = T - t$, et la nouvelle fonction $u(\tau, x) = V(t, s)$. Montrer que u est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\partial_t u - a\,\partial_{xx} u + b\,\partial_x u + c\,u = 0, \quad t \in (0, T),\ x \in [x_{\min}, x_{\max}]. \tag{2a}$$
$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [x_{\min}, x_{\max}], \tag{2b}$$
$$u(t, x_{\min}) = g(t), \tag{2c}$$
$$u(t, x_{\max}) = d(t), \tag{2d}$$

où l'on précisera les valeurs des constantes a, b, c et des fonctions $g(t)$, $d(t)$ et $u_0(x)$ en fonction des données du problème (r, σ, V_g, V_d et φ). On supposera dans toute la suite que b est positif :

$$b \geq 0.$$

(Le cas $b \leq 0$ pouvant être traité de manière analogue).

On considère un maillage régulier de $\Omega = (x_{\min}, x_{\max})$ de la forme suivante. On pose $h = (x_{\max} - x_{\min})/I$ où $I \geq 1$ est un entier, et $x_j = x_{\min} + (j - \frac{1}{2})h$ pour $j = 1, \ldots, I$. On note de même

$$x_{j \pm \frac{1}{2}} = x_j \pm \frac{h}{2} \quad \text{et} \quad I_j := (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}).$$

On introduit l'espace fonctionnel V_h suivant. Soit $k \geq 0$ un entier. On note P_k l'espace des polynômes réels de degré au plus k, et V_h est alors défini par:

$$V_h := \left\{ v : (x_{\min}, x_{\max}) \to \mathbb{R} \text{ tel que } \forall j \in \{1, \ldots, I\},\ v_{|I_j} \in P_k \right\}$$

où $v_{|I_j}$ désigne la fonction v restreinte à l'intervalle I_j. Les fonctions de V_h sont donc des polynômes de degré au plus k, par morceaux. On notera que l'on n'impose pas la continuité de ces fonctions aux interfaces $x_{j \pm \frac{1}{2}}$.

Pour simplifier, on commence par considérer le cas de l'équation dite de "transport pur" ($a = c = 0$) sur le domaine $\Omega = (0, 1)$:

$$\partial_t u + b\,\partial_x u = 0, \quad x \in (0, 1), t \in (0, T) \tag{3a}$$
$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in (0, 1). \tag{3b}$$

On impose en outre des conditions aux limites périodiques, c'est-à-dire qu'on cherche u 1-périodique:

$$u(t, 1) = u(t, 0), \quad \forall t \in (0, T). \tag{3c}$$

En particulier, u_0 est supposé 1-périodique.

On notera $\|v\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 |v(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ la norme dans $L^2(0,1)$ et $(v,w)_{L^2(0,1)}$ le produit scalaire correspondant.

On considère le schéma suivant:

- La condition initiale $u^0 \in V_h$ est définie par $u^0 := \Pi_h(u_0)$, c'est-à-dire la projection en norme $L^2(0,1)$ de u_0 sur V_h. Cette projection est définie comme l'unique élément de V_h vérifiant
$$\|\Pi_h(u_0) - u_0\|_{L^2(0,1)} = \inf_{v \in V_h} \|v - u_0\|_{L^2(0,1)}.$$
- Connaissant $u^n \in V_h$, on définit $u^{n+1} \in V_h$ par :
$$\int_{I_j} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v - b \int_{I_j} u^n \partial_x v + b\left(u^{n,-}_{j+\frac{1}{2}} v^-_{j+\frac{1}{2}} - u^{n,-}_{j-\frac{1}{2}} v^+_{j-\frac{1}{2}}\right) = 0,$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, I\}, \ \forall v \in V_h, \quad (4)$$
où l'on a utilisé la notation $v^+_{j\pm\frac{1}{2}} = v\left(x^+_{j\pm\frac{1}{2}}\right)$ $\left(\text{respectivement } v^-_{j\pm\frac{1}{2}} = v\left(x^-_{j\pm\frac{1}{2}}\right)\right)$ pour désigner la limite à droite (respectivement à gauche) de v en $x_{j\pm\frac{1}{2}}$ (et de même pour u^n).

L'indice n varie entre 0 et N et $\Delta t = T/N$. Les conditions aux limites périodiques sont imposées par la convention:

$$v^-_{1-\frac{1}{2}} := v^-_{I+\frac{1}{2}} \text{ et } v^+_{I+\frac{1}{2}} := v^+_{1-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

et de même pour les fonctions u^n.

Question 2. Soit $v \in L^2(0,1)$ et $\Pi_h(v)$ la projection de v sur V_h.
(i) Montrer que pour tout $w \in V_h$,

$$(v - \Pi_h(v), w)_{L^2(0,1)} = 0.$$

(ii) En déduire que
$$\|\Pi_h(v)\|_{L^2(0,1)} \leq \|v\|_{L^2(0,1)}.$$

Question 3. Rappeler comment s'écrit la solution exacte $u(t,x)$ du problème de transport (3a)-(3c). (On pourra dériver $t \to u(t, x+bt)$.) En déduire que si u_0 est périodique de classe C^{k+1} (en espace), alors u est aussi de classe C^{k+1} (en temps et en espace).

Question 4. Montrer que (4) est équivalent à

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}\, v - b\sum_{j=1}^{I}\int_{I_j} u^n\,\partial_x v + b\sum_{j=1}^{I}\left(u^{n,-}_{j+\frac12}v^-_{j+\frac12} - u^{n,-}_{j-\frac12}v^+_{j-\frac12}\right) = 0, \quad \forall v\in V_h. \tag{6}$$

Dans la suite, on notera $H(u,v)$ l'opérateur bilinéaire suivant:

$$H(u,v) = -b\sum_{j=1}^{I}\int_{I_j} u\,\partial_x v + b\sum_{j=1}^{I}\left(u^{-}_{j+\frac12}v^-_{j+\frac12} - u^{-}_{j-\frac12}v^+_{j-\frac12}\right). \tag{7}$$

On décompose les fonctions $u^n(x)$ dans la base des

$$\varphi^j_\alpha(x) = \left(\frac{x-x_j}{h}\right)^\alpha 1_{I_j}(x)$$

où $\alpha\in\{0,\dots,k\}$ et $j\in\{1,\dots,I\}$. On peut donc écrire pour tout $x\in I_j$,

$$u^n(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} U^{n,j}_\alpha\,\varphi^j_\alpha(x)$$

et on pose, pour $j\in\{1,\dots,I\}$,

$$U^{n,j} := \begin{pmatrix} U^{n,j}_0 \\ \vdots \\ U^{n,j}_k \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites périodiques se traduisent via la convention:

$$U^{n,0} := U^{n,I} \text{ et } U^{n,I+1} := U^{n,1}.$$

Question 5. Montrer que le schéma (4) s'écrit sous la forme suivante:

$$\forall j\in\{1,\dots,I\},\quad M\left(\frac{U^{n+1,j}-U^{n,j}}{\Delta t}\right) + P\,U^{n,j} - Q\,U^{n,j-1} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^{k+1},$$

où M, P et Q sont des matrices de taille $(k+1)\times(k+1)$, dont on donnera une formule explicite des coefficients. Montrer que, u^n étant donné, u^{n+1} est bien défini.

Question 6. On note de plus

$$U^n := \begin{pmatrix} U^{n,1} \\ \vdots \\ U^{n,I} \end{pmatrix}.$$

Montrer que le système précédent peut se réécrire sous la forme suivante:

$$\mathbb{M}\left(\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t}\right)+\mathbb{A}U^n=0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^{I(k+1)}.$$

où l'on explicitera les matrices par bloc $\mathbb{A}$ et $\mathbb{M}$, en fonction des matrices M, P et Q.

Question 7. On s'intéresse à la stabilité et à la convergence de la méthode précédente, sous une forme modifiée. Plus précisément on va considérer la version implicite suivante: $u^n \in V_h$ étant donné, trouver $u^{n+1} \in V_h$, solution de

$$\forall v \in V_h, \quad \left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t},\ v\right)_{L^2(0,1)} + H(u^{n+1},v)=0. \tag{8}$$

Dans la suite, on note C^1_{pm} les fonctions de classes C^1 sur tous les intervalles I_j. De plus, pour $v \in C^1_{pm}$, on utilise la convention (5) de périodicité.
(i) Montrer que pour tout $v \in C^1_{pm}$, on a

$$H(v,v)=\frac{b}{2}\sum_{j=1}^{I}\left([v]_{j-\frac{1}{2}}\right)^2$$

où on désigne par

$$[v]_{j-\frac{1}{2}} := v^+_{j-\frac{1}{2}} - v^-_{j-\frac{1}{2}}$$

le saut de v en $x_{j-\frac{1}{2}}$.
(ii) En déduire l'existence et l'unicité de u^{n+1} (pour u^n fixé). (On pourra démontrer que la matrice $\mathbb{B}=\frac{1}{\Delta t}\mathbb{M}+\mathbb{A}$ est inversible en utilisant (i).)

Question 8. (Stabilité du schéma) Montrer que

$$(u^{n+1},u^{n+1})_{L^2(0,1)} \leq (u^{n+1},u^n)_{L^2(0,1)}, \quad \forall n \geq 0 \tag{9}$$

et en déduire que

$$\|u^n\|_{L^2(0,1)} \leq \|u^0\|_{L^2(0,1)} \leq \|u_0\|_{L^2(0,1)}.$$

Question 9. Montrer que pour tout p, q dans C^1_{pm}, on a

$$H(p,q)=b\sum_{j=1}^{I}\int_{I_j} q\,\partial_x p + b\sum_{j=1}^{I}[p]_{j-\frac{1}{2}}q^+_{j-\frac{1}{2}}.$$

Question 10. (Erreur de consistance) On note $v^n(x)=u(t_n,x)$ où u est la solution exacte du problème (3), supposée de classe C^{k+1} avec $k \geq 1$.

(i) Montrer que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\forall w \in C^1_{pm}, \quad (\partial_t u(t,.),\, w)_{L^2(0,1)} + H(u(t,.),w)=0. \tag{10}$$

(ii) En déduire que la fonction $\mathcal{E}_n$ définie par

$$\mathcal{E}_n(w) := \left(\frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t},\ w\right)_{L^2(0,1)} + H(v^{n+1}, w), \tag{11}$$

vérifie

$$\exists C \geq 0,\ \forall n \in \{0, \ldots, N-1\}, \forall w \in C^1_{pm}, \quad |\mathcal{E}_n(w)| \leq C\Delta t \|w\|_{L^2(0,1)}.$$

Ici et dans toute la suite, C désigne une constante **indépendante de Δt et de h**, dont la valeur peut changer d'une occurrence à l'autre.

Question 11. On note $e^n(x) := u^n(x) - v^n(x) = u^n(x) - u(t_n, x)$ l'erreur du schéma. (i) Montrer que

$$\forall w \in V_h, \quad \left(\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t},\ w\right)_{L^2(0,1)} + H(e^{n+1}, w) = -\mathcal{E}_n(w). \tag{12}$$

(ii) On pose

$$\delta^{n+1} := e^{n+1} - \Pi_h(e^{n+1}).$$

Montrer que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t}, e^{n+1}\right)_{L^2(0,1)} + H(e^{n+1}, e^{n+1}) \\
&\qquad = -\mathcal{E}_n(\Pi_h(e^{n+1})) + \left(\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t},\ \delta^{n+1}\right)_{L^2(0,1)} + H(e^{n+1}, \delta^{n+1}) \\
&\qquad \leq C\Delta t \|e^{n+1}\|_{L^2(0,1)} + \left(\frac{\delta^{n+1}-\delta^n}{\Delta t},\ \delta^{n+1}\right)_{L^2(0,1)} + |H(e^{n+1}, \delta^{n+1})|.
\end{aligned}$$

Question 12. (i) Montrer que $\exists C \geq 0$, $\forall n \in \{0, \ldots, N\}$,

$$\|\delta^n\|_{L^2(0,1)} \leq C h^{k+1}.$$

(On pourra utiliser un développement de Taylor de v^{n+1} à l'ordre k sur I_j.)

(ii) En déduire que $\exists C \geq 0$, $\forall n \in \{0, \ldots, N\}$,

$$\left| \left(\frac{\delta^{n+1}-\delta^n}{\Delta t},\ \delta^{n+1}\right)_{L^2(0,1)} \right| \leq C \frac{h^{2k+2}}{\Delta t}.$$

Question 13. On veut montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$, telle que pour tout p, q dans V_h,

$$|H(p,q)| \leq \frac{C}{h} \|p\|_{L^2(0,1)} \, \|q\|_{L^2(0,1)}.$$

(i) Montrer qu'il existe une constante C tel que pour tout polynôme $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ de degré au plus k, on a

$$\|\partial_x f\|_{L^2(0,1)} \leq C\|f\|_{L^2(0,1)}, \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^\infty(0,1)} \leq C\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

(On pourra utiliser l'équivalence des normes dans un espace vectoriel de dimension finie.)

(ii) En déduire que pour tout p dans V_h, on a

$$\sum_{j=1}^{I} \|\partial_x p\|_{L^2(I_j)} \leq \frac{C}{h}\|p\|_{L^2(0,1)} \quad \text{et, } \forall j\in\{1,\dots,I\},\ \|p\|_{L^\infty(I_j)} \leq \frac{C}{h^{1/2}}\|p\|_{L^2(I_j)}.$$

(iii) Montrer que pour toute fonction $q\in V_h$ on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{I}(q^+_{j-\frac{1}{2}})^2 \leq \frac{C}{h}\|q\|^2_{L^2(0,1)}$.

(iv) Conclure.

Question 14. (Convergence) (i) Déduire des questions précédentes que,

$$\left(\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t},\ e^{n+1}\right)_{L^2(0,1)} \ \leq\ C(\Delta t + h^k)\|e^{n+1}\|_{L^2(0,1)} + C\frac{h^{2k+2}}{\Delta t}. \tag{13}$$

(ii) En déduire que

$$(1-\Delta t)\|e^{n+1}\|^2_{L^2(0,1)} \leq \|e^n\|^2_{L^2(0,1)} + C\Delta t\left(\Delta t^2 + h^{2k} + \frac{h^{2k+2}}{\Delta t}\right)$$

puis enfin que, pour Δt assez petit et pour $n\in\{0,\dots,N\}$,

$$\|e^n\|^2_{L^2(0,1)} \leq C\left(\Delta t^2 + h^{2k} + \frac{h^{2k+2}}{\Delta t}\right).$$

(On pourra utiliser le fait que pour $\Delta t\in[0,1/2]$, $(1-\Delta t)^{-1}\leq \exp(2\Delta t)$.) Conclure en donnant un résultat de convergence.

On considère maintenant le système initial (2) avec $a\geq 0$, $b\geq 0$ et $c\geq 0$. On se place à nouveau sur $(0,1)$ et dans le cadre 1-périodique pour simplifier l'étude. Ce système peut se réécrire sous la forme :

$$\partial_t u + a\partial_x p + b\partial_x u + cu = 0, \tag{14}$$
$$p + \partial_x u = 0. \tag{15}$$

On considère le schéma implicite suivant: Trouver u^{n+1} et p^{n+1} dans V_h tel que

$$\int_{I_j} \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}\, v - a\int_{I_j} p^{n+1}\partial_x v + a\Big(p^{n+1,-}_{j+\frac12} v^-_{j+\frac12} - p^{n+1,-}_{j-\frac12} v^+_{j-\frac12}\Big)$$
$$-b\int_{I_j} u^{n+1}\partial_x v + b\Big(u^{n+1,-}_{j+\frac12} v^-_{j+\frac12} - u^{n+1,-}_{j-\frac12} v^+_{j-\frac12}\Big) + c\int_{I_j} u^{n+1} v = 0,$$
$$\forall j\in\{1,\dots,I\},\ \forall v\in V_h, \tag{16}$$
$$\int_{I_j} p^{n+1}\, w - \int_{I_j} u^{n+1}\partial_x w + \Big(u^{n+1,+}_{j+\frac12} w^-_{j+\frac12} - u^{n+1,+}_{j-\frac12} w^+_{j-\frac12}\Big) = 0,$$
$$\forall j\in\{1,\dots,I\},\ \forall w\in V_h. \tag{17}$$

Question 15. (Stabilité) Montrer la majoration

$$\|u^{n+1}\|_{L^2(0,1)} \le \|u^n\|_{L^2(0,1)}.$$

(On pourra choisir les fonctions particulières $v = u^{n+1}$ et $w = p^{n+1}$).

Question 16. Proposer une estimation d'erreur en suivant la méthode utilisée pour le cas du transport pur.

Question 17. Discuter de l'intérêt que cette méthode peut avoir par rapport à une méthode d'éléments finis classique (type $P1$), notamment lorsque le paramètre a est petit.