Méthodes Déterministes en Finance

7 Février 2011

Corrigé partiel

Question 1.
(i) Pour un put, $V_g(t) = K\exp(-r(T-t))$ et $V_d(t) = 0$.
(ii) Pour un call, $V_g(t) = 0$ et $V_d(t) = s_{\max} - K\exp(-r(T-t))$.
(iii) On obtient l'EDP sur u avec les coefficients $a = \sigma^2/2$, $b = -r + \sigma^2/2$, $c = r$, $g(t) = V_g(T-t)$, $d(t) = V_d(T-t)$ et $u_0(x) = \varphi(\exp(x))$.

Question 2.
(i) On a

$$\|v - \Pi_h(v)\| \leq \|v - w\|$$

pour toute fonction $w \in V_h$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et pour tout $w \in V_h$,

$$\begin{aligned}\|v - \Pi_h(v)\|^2 &\leq \|v - \Pi_h(v) + \varepsilon w\|^2 \\ &= \|v - \Pi_h(v)\|^2 + 2\varepsilon(v - \Pi_h(v), w) + \varepsilon^2\|w\|^2.\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq 2\varepsilon(v - \Pi_h(v), w) + \varepsilon^2\|w\|^2$$

ce qui implique $(v - \Pi_h(v), w) = 0$.
(ii) On choisit $w = \Pi_h(v)$ dans l'égalité précédente, d'où

$$\|\Pi_h(v)\|^2 = (v, \Pi_h(v)) \leq \|v\|\,\|\Pi_h(v)\|$$

par Cauchy Schwarz. Ce qui implique le résultat demandé.

Question 3. On observe que

$$\frac{d}{dt}u(t, x+bt) = (\partial_t u + b\,\partial_x u)(t, x+bt) = 0$$

et donc $u(t, x+bt) = u(0, x) = u_0(x)$ d'où

$$u(t,x) = u_0(x - bt).$$

On en déduit que $u_0 \in C^{k+1}$ implique $u \in C^{k+1}$.

Question 4. Pour passer de (4) à (6), il suffit de sommer (4) pour $j = 1, \dots, I$. Pour passer de (6) à (4), il suffit d'observer qu'on peut prendre des fonctions tests v nulles sur tous les intervalles I_j sauf un.

Question 5. On vérifie que les expressions des matrices M, P et Q ne dépendent pas de l'intervalle I_j considéré. On a, en écrivant $u^n = \sum_{\beta=0}^k U_\beta^{n,j}\varphi_\beta^j$ et en prenant $v = \varphi_\alpha^j$ comme fonction test : pour $\alpha, \beta \in \{0, \dots, k\}$,

$$M_{\alpha,\beta} = \int_{I_1} \varphi_\beta^1\,\varphi_\alpha^1 = h\int_{-1/2}^{1/2} x^{\alpha+\beta}\,dx = \frac{h}{(\alpha+\beta+1)}\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}}(1 - (-1)^{\alpha+\beta+1}).$$

Notons $A_{\alpha,\beta} := -b \displaystyle\int_{I_1} \varphi^1_\beta\, \partial_x \varphi^1_\alpha$. On calcule, pour $\alpha = 0$, $A_{\alpha,\beta} = 0$ et pour $\alpha \geq 1$, $A_{\alpha,\beta} = -b\dfrac{\alpha}{h} M_{\alpha-1,\beta}$. On a alors, pour $\alpha, \beta \in \{0, \dots, k\}$,

$$P_{\alpha,\beta} = A_{\alpha,\beta} + b\, \varphi^j_\beta(x^-_{j+\frac{1}{2}})\, \varphi^j_\alpha(x^-_{j+\frac{1}{2}}) = A_{\alpha,\beta} + \frac{b}{2^{\alpha+\beta}}$$

et

$$Q_{\alpha,\beta} = b\, \varphi^{j-1}_\beta(x^-_{j+\frac{1}{2}})\, \varphi^j_\alpha(x^+_{j-\frac{1}{2}}) = \frac{b}{2^{\alpha+\beta}}(-1)^\alpha.$$

Pour le calcul de Q, on a utilisé le fait que $u^{n,-}_{j-\frac{1}{2}} = u^{n,-}_{(j-1)+\frac{1}{2}}$.

Comme toute matrice de masse, la matrice M est inversible car injective : si $M_{\alpha,\beta} U_\beta = 0$, alors $U_\alpha M_{\alpha,\beta} U_\beta = 0$ et donc $\int_{I_1} u^2 = 0$ (où $u(x) = U_\alpha \varphi^1_\alpha$) ce qui implique $u = 0$ et donc $U = 0$ (avec sommation sur les indices répétés). Par conséquent, u^{n+1} s'obtient facilement à partir de u^n.

Question 6. On vérifie que $\mathbb{M}$ et $\mathbb{A}$ sont des matrices de $\mathbb{R}^{I(k+1)\times I(k+1)}$ qui s'écrivent, par blocs de taille $(k+1)\times(k+1)$:

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & -Q \\ -Q & P & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -Q & P \end{bmatrix}.$$

Question 7.
(i) On a (en utilisant la périodicité à l'avant-dernière ligne) :

$$\begin{aligned}
H(v,v) &= -b \sum_{j=1}^{I} \int_{I_j} v\, \partial_x v + b \sum_{j=1}^{I} \left(v^-_{j+\frac{1}{2}} v^-_{j+\frac{1}{2}} - v^-_{j-\frac{1}{2}} v^+_{j-\frac{1}{2}} \right) \\
&= -\frac{b}{2} \sum_{j=1}^{I} \int_{I_j} \partial_x(v^2) + b \sum_{j=1}^{I} \left((v^-_{j+\frac{1}{2}})^2 - v^-_{j-\frac{1}{2}} v^+_{j-\frac{1}{2}} \right) \\
&= -\frac{b}{2} \sum_{j=1}^{I} \left((v^-_{j+\frac{1}{2}})^2 - (v^+_{j-\frac{1}{2}})^2 \right) + b \sum_{j=1}^{I} \left((v^-_{j+\frac{1}{2}})^2 - v^-_{j-\frac{1}{2}} v^+_{j-\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{b}{2} \sum_{j=1}^{I} \left((v^-_{j+\frac{1}{2}})^2 + (v^+_{j-\frac{1}{2}})^2 - 2\, v^-_{j-\frac{1}{2}} v^+_{j-\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{b}{2} \sum_{j=1}^{I} \left((v^-_{j-\frac{1}{2}})^2 + (v^+_{j-\frac{1}{2}})^2 - 2\, v^-_{j-\frac{1}{2}} v^+_{j-\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{b}{2} \sum_{j=1\dots,I} [v]^2_{j-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

(ii) Le schéma (8) s'écrit sous forme matricielle

$$\mathbb{M}\left(\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t}\right)+\mathbb{A}U^{n+1}=0$$

et il s'agit donc de montrer que la matrice $\mathbb{B}=\mathbb{M}/\Delta t+\mathbb{A}$ est inversible. Soit un vecteur $V\in\mathbb{R}^{I(k+1)}$ tel que $\mathbb{B}V=0$. On a alors $V^T\mathbb{B}V=0$. Or, on vérifie que

$$\begin{aligned} V^T\mathbb{B}V &= \frac{1}{\Delta t}\int_0^1 v^2+H(v,v)\\ &= \frac{1}{\Delta t}\int_0^1 v^2+\frac{b}{2}\sum_{j=1\dots,I}[v]^2_{j-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où $v=\sum_{\alpha=0}^k V_\alpha^j\varphi_\alpha^j$. Par conséquent, $v=0$ et donc $V=0$, ce qui montre l'injectivité et donc l'inversibilité de la matrice $\mathbb{B}$.

Question 8. En prenant $v=u^{n+1}$ dans (8) et en utilisant le fait que $H(u^{n+1},u^{n+1})\geq 0$, on obtient

$$(u^{n+1},u^{n+1})\leq(u^{n+1},u^n).$$

On en déduit, par Cauchy Schwarz, $\|u^{n+1}\|^2\leq\|u^{n+1}\|\|u^n\|$ et par conséquent

$$\|u^{n+1}\|\leq\|u^n\|,$$

d'où par récurrence,

$$\|u^n\|\leq\|u^0\|.$$

Par ailleurs, $\|u^0\|=\|\Pi_h(u_0)\|\leq\|u_0\|$, en utilisant le résultat de la question 2 (ii).

Question 9. On a :

$$\begin{aligned} H(p,q) &= -b\sum_{j=1}^I\int_{I_j}p\,\partial_x q+b\sum_{j=1}^I\left(p^-_{j+\frac{1}{2}}q^-_{j+\frac{1}{2}}-p^-_{j-\frac{1}{2}}q^+_{j-\frac{1}{2}}\right)\\ &= b\sum_{j=1}^I\int_{I_j}q\,\partial_x p-b\sum_{j=1}^I\left((pq)^-_{j+\frac{1}{2}}-(pq)^+_{j-\frac{1}{2}}\right)+b\sum_{j=1}^I\left(p^-_{j+\frac{1}{2}}q^-_{j+\frac{1}{2}}-p^-_{j-\frac{1}{2}}q^+_{j-\frac{1}{2}}\right)\\ &= b\sum_{j=1}^I\int_{I_j}q\,\partial_x p+b\sum_{j=1}^I\left((pq)^+_{j-\frac{1}{2}}-p^-_{j-\frac{1}{2}}q^+_{j-\frac{1}{2}}\right)\\ &= b\sum_{j=1}^I\int_{I_j}q\,\partial_x p+b\sum_{j=1}^I[p]_{j-\frac{1}{2}}q^+_{j-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Question 10.
(i) Soit $w \in C^1_{pm}$. On a, en utilisant la régularité de la fonction u (et en particulier sa continuité aux bornes des intervalles I_j),

$$\begin{aligned}(\partial_t u(t,.),\, w) + H(u(t,.), w) &= \int_0^1 \partial_t u\, w + b \sum_{j=1}^{I} \int_{I_j} w\, \partial_x u + b \sum_{j=1}^{I} [u]_{j-\frac{1}{2}} w^+_{j-\frac{1}{2}} \\ &= \int_0^1 \partial_t u\, w + b \int_0^1 w\, \partial_x u \\ &= \int_0^1 (\partial_t u + b\, \partial_x u)\; w \\ &= 0.\end{aligned}$$

(ii) On a :

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}_n(w)| &= \left| \left(\frac{u(t_{n+1},.) - u(t_n,.)}{\Delta t},\; w \right) + H(u(t_{n+1},.), w) \right| \\ &= \left| \left(\frac{u(t_{n+1},.) - u(t_n,.)}{\Delta t},\; w \right) - (\partial_t u(t_{n+1},.), w) \right| \\ &\le \left\| \frac{u(t_{n+1},.) - u(t_n,.)}{\Delta t} - \partial_t u(t_{n+1},.) \right\| \|w\| \\ &\le C \Delta t \|w\|\end{aligned}$$

où $C = \|\partial_{t,t} u\|_{L^\infty}/2$ est une constante indépendante des paramètres de discrétisation.

Question 11.
(i) Soit $w \in V_h$. On a

$$\begin{aligned}&\left(\frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t},\; w \right) + H(e^{n+1}, w) \\ &= \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t},\; w \right) + H(u^{n+1}, w) - \left(\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t},\; w \right) - H(v^{n+1}, w) \\ &= 0 - \mathcal{E}_n(w)\end{aligned}$$

puisque u^n est solution de (6).

(ii) On a (en utilisant les Questions 2 (i) et (ii), et la Question 10 (ii)) :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t},\ e^{n+1}\right) + H(e^{n+1}, e^{n+1}) \\
&= \left(\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t},\ \delta^{n+1}\right) + H(e^{n+1}, \delta^{n+1}) + \left(\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t},\ \Pi_h(e^{n+1})\right) + H(e^{n+1}, \Pi_h(e^{n+1})) \\
&= \left(\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t},\ \delta^{n+1}\right) + H(e^{n+1}, \delta^{n+1}) - \mathcal{E}_n(\Pi_h(e^{n+1})) \\
&= \left(\frac{\delta^{n+1}-\delta^n}{\Delta t},\ \delta^{n+1}\right) + H(e^{n+1}, \delta^{n+1}) - \mathcal{E}_n(\Pi_h(e^{n+1})) \\
&\leq \left(\frac{\delta^{n+1}-\delta^n}{\Delta t},\ \delta^{n+1}\right) + |H(e^{n+1}, \delta)| + C\Delta t\|e^{n+1}\|.
\end{aligned}$$

Question 12.
(i) L'opérateur Π_h est linéaire, car c'est la projection orthogonale sur V_h qui est un espace vectoriel. On a bien sûr $u^{n+1} - \Pi_h(u^{n+1}) = 0$ puisque $u^{n+1} \in V_h$, et donc

$$\delta^n = -(v^n - \Pi_h(v^n)) = -(u(t_n, .) - \Pi_h(u(t_n, .))).$$

Remarquer que v^n est de classe C^{k+1}. On note alors p_h la fonction de V_h, qui coïncide avec le développement de Taylor à l'ordre k de v^n par rapport au point x_j sur chaque I_j. On a donc

$$\begin{aligned}
\|\delta^n\|_{L^2} &= \|v^n - \Pi_h(v^n)\|_{L^2} \\
&\leq \|v^n - p_h\|_{L^2} \leq \|v^n - p_h\|_{L^\infty} \\
&\leq \frac{1}{(k+1)!} \left\|\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} v^n\right\|_{L^\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} = Ch^{k+1},
\end{aligned}$$

puisque v^n est de classe C^{k+1}.
(ii) On en déduit l'inégalité demandée par Cauchy Schwarz.

Question 13.
(i) On observe que sur l'espace vectoriel de dimension finie des polynômes de degré k et définis sur $(0,1)$, les normes L^2, L^∞ et H^1 sont équivalentes. Ceci implique les inégalités demandées.
(ii) On remarque que pour $p \in V_h$ et pour $j \in \{1, \ldots, I\}$, l'application $x \in [0,1] \mapsto p(x_{j-\frac{1}{2}} + xh)$ est un polynôme de degré k. Par conséquent, on a, en utilisant la question précédente :

$$\int_0^1 |\partial_x \left(p(x_{j-\frac{1}{2}} + xh)\right)|^2 \, dx \leq C \int_0^1 |p(x_{j-\frac{1}{2}} + xh)|^2 \, dx$$

et

$$\sup_{x \in [0,1]} |p(x_{j-\frac{1}{2}} + xh)|^2 \leq C \int_0^1 |p(x_{j-\frac{1}{2}} + xh)|^2 \, dx.$$

On en déduit, par changement de variable :

$$h\int_{I_j} |\partial_x p|^2 \leq Ch^{-1}\int_{I_j} |p|^2$$

et

$$\sup_{x\in I_j} |p(x)|^2 \leq Ch^{-1}\int_{I_j} |p|^2.$$

On en déduit les résultats demandés en sommant sur j la première inégalité.
(iii) Soit $q \in V_h$. On a, en utilisant ce qui précède :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{I}(q^+_{j-\frac{1}{2}})^2 &\leq \sum_{j=1}^{I}\|q\|^2_{L^\infty(I_j)}\\ &\leq \frac{C}{h}\sum_{j=1}^{I}\|q\|^2_{L^2(I_j)} = \frac{C}{h}\|q\|^2_{L^2(0,1)}.\end{aligned}$$

(iv) On a :

$$\begin{aligned}|H(p,q)| &= \left| b\sum_{j=1}^{I}\int_{I_j} q\,\partial_x p + b\sum_{j=1}^{I}[p]_{j-\frac{1}{2}}q^+_{j-\frac{1}{2}}\right|\\ &= \left| b\sum_{j=1}^{I}\int_{I_j} q\,\partial_x p + b\sum_{j=1}^{I}p^+_{j-\frac{1}{2}}q^+_{j-\frac{1}{2}} - b\sum_{j=1}^{I}p^-_{j-\frac{1}{2}}q^+_{j-\frac{1}{2}}\right|\\ &\leq b\left(\sum_{j=1}^{I}\int_{I_j} q^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{I}\int_{I_j}(\partial_x p)^2\right)^{1/2} + b\left(\sum_{j=1}^{I}(p^+_{j-\frac{1}{2}})^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{I}(q^+_{j-\frac{1}{2}})^2\right)^{1/2}\\ &\quad + b\left(\sum_{j=1}^{I}(p^-_{j-\frac{1}{2}})^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{I}(q^+_{j-\frac{1}{2}})^2\right)^{1/2}\\ &\leq b\,Ch^{-1}\|q\|_{L^2(0,1)}\|p\|_{L^2(0,1)} + b\,Ch^{-1}\|q\|_{L^2(0,1)}\|p\|_{L^2(0,1)}\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Question 14.
(i) On a, en partant du résultat de la Question 11 (ii) :

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t},\ e^{n+1}\right) &\leq \left(\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t},\ e^{n+1}\right) + H(e^{n+1},e^{n+1})\\ &\leq C\Delta t\|e^{n+1}\| + \left(\frac{\delta^{n+1}-\delta^n}{\Delta t},\ \delta^{n+1}\right) + |H(e^{n+1},\delta^{n+1})|\\ &\leq C\Delta t\|e^{n+1}\| + C\frac{h^{2k+2}}{\Delta t} + \frac{C}{h}\|e^{n+1}\|\|\delta^{n+1}\|\\ &\leq C(\Delta t + h^k)\|e^{n+1}\| + C\frac{h^{2k+2}}{\Delta t}.\end{aligned}$$

(*ii*) On a donc

$$\begin{aligned}\|e^{n+1}\|^2 &\leq (e^n, e^{n+1}) + C\Delta t(\Delta t + h^k)\|e^{n+1}\| + Ch^{2k+2} \\ &\leq \frac{1}{2}(\|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2) + \frac{1}{2}\left(\Delta t\|e^{n+1}\|^2 + C^2\Delta t(\Delta t + h^k)^2\right) + Ch^{2k+2}.\end{aligned}$$

D'où l'inégalité:

$$(1 - \Delta t)\|e^{n+1}\|^2 \leq \|e^n\|^2 + C\Delta t\left(\Delta t^2 + h^{2k} + \frac{h^{2k+2}}{\Delta t}\right).$$

On a donc, en utilisant le fait que pour $0 \leq \Delta t \leq 1/2$, $(1 - \Delta t)^{-1} \leq \exp(2\Delta t)$

$$\|e^{n+1}\|^2 \leq \exp(2\Delta t)\|e^n\|^2 + C\Delta t \exp(2\Delta t)\left(\Delta t^2 + h^{2k} + \frac{h^{2k+2}}{\Delta t}\right)$$

et, par récurrence,

$$\|e^n\|^2 \leq \|e^0\|^2 \exp(2n\Delta t) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \exp(2k\Delta t)\right) C\Delta t \exp(2\Delta t)\left(\Delta t^2 + h^{2k} + \frac{h^{2k+2}}{\Delta t}\right).$$

D'où, puisque $n\Delta t \leq T$ et $\|e^0\| \leq Ch^{k+1}$

$$\|e^n\|^2 \leq C\left(\Delta t^2 + h^{2k} + \frac{h^{2k+2}}{\Delta t}\right).$$

Cette inégalité permet de montrer la convergence du schéma dans la limite $h \to 0$ et $\Delta t \to 0$, avec de plus $\dfrac{h^{2k+2}}{\Delta t} \to 0$. Par exemple, on peut prendre $\Delta t = Ch^2$ et la convergence est en h^4 si $k \geq 2$.

Question 15. Nous ne détaillons pas la réponse à cette question. On obtient le résultat en suivant la même démarche que précédemment.

Question 16. Nous ne détaillons pas la réponse à cette question. Il s'agit à nouveau d'une extension des résultats précédents, sans nouvelles difficultés.

Question 17. L'intérêt de la méthode est qu'elle donne de bons résultats même quand $a = 0$ (pas de diffusion) contrairement à une approche éléments finis classiques (fonctions continues). Il s'agit d'une méthode *Discontinuous Galerkin*. On pourra consulter par exemple l'ouvrage [A. Ern and J.-L. Guermond, *Theory and Practice of Finite Elements*, Springer, 2004] pour des compléments sur cette approche. Par ailleurs, pour des estimées d'erreur plus précises et l'obtention d'une erreur en h^{k+1}, on pourra consulter [B. Cockburn, *An introduction to the Discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems*, CIME lecture notes, 1997] disponible à l'adresse suivante :
`http://www.math.umn.edu/ cockburn/papers/cime.ps.gz`.