Méthodes Déterministes en Finance

6 Février 2012

Durée: 3 heures.

Les notes de cours manuscrites sont autorisées. Les questions pourront être traitées indépendamment les unes des autres. Répondez de manière succinte aux questions de cours: l'objectif est de vérifier que vous avez compris et assimilé les notions.

Question de cours 1.

Donner les étapes essentielles qui permettent d'obtenir une équation aux dérivées partielles pour l'évolution du prix d'une option asiatique de payoff $\varphi(S_T, A_T) = (A_T - S_T)_+$, où $A_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_t\,dt$ désigne la moyenne du sous-jacent, dans le modèle de Black-Scholes.

Question de cours 2.

On considère l'inéquation aux dérivées partielles pour une option américaine:

$$\begin{cases} \min\left(-\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\sigma^2 s^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2} - rs\dfrac{\partial v}{\partial s} + rv,\ v - \varphi\right) = 0, \quad t \in (0,T),\ s > 0, \\ v(T,s) = \varphi(s). \end{cases}$$

Donner:
(i) Un schéma aux différences finies de type Euler implicite. Rappeler brièvement les arguments permettant de montrer que le schéma est bien défini.
(ii) Un schéma implicite de type splitting.

Problème.

Question 1. On considère une option européenne portant sur $d \geq 1$ sous-jacents, de payoff $\varphi(S_T^1, \ldots, S_T^d)$, dans le cadre du modèle de Black Scholes. Rappeler l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le prix de l'option $P(t, S^1, \ldots, S^d)$, pour $t \in [0,T]$, et $(S^1, \ldots, S^d) \in (\mathbb{R}_+)^d$. Pourquoi est-il difficile de résoudre numériquement cette équation quand d est grand ?

Dans la suite, on s'intéresse à une méthode qui permet d'approcher la solution d'une équation aux dérivées partielles en grande dimension. Pour simplifier, on prend comme problème modèle, le problème de Poisson: trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, et $f \in L^2(\Omega)$.

Question 2. Donner une formulation variationnelle pour le problème (1) et énoncer et prouver un résultat d'existence et unicité.

On introduit la fonctionnelle

$$J : \begin{cases} H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v \end{cases} \tag{2}$$

Question 3. Montrer que $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(v-u)|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$, où u est solution de (1). En déduire qu'il existe une unique solution au problème: trouver $v \in H_0^1(\Omega)$ qui réalise le minimum de J sur $H_0^1(\Omega)$.

On suppose dans la suite que $d = 4$. On notera la variable dans Ω sous la forme (x, y) avec $x = (x_1, x_2) \in \Omega_x \subset \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et donc $(x, y) \in \Omega = \Omega_x \times \Omega_y \subset \mathbb{R}^4$. On va chercher la solution u du problème (1) sous la forme:

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 1} r_n(x) s_n(y).$$

On note dans la suite, pour un couple $(r, s) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$,

$$(r \otimes s)(x, y) = r(x)s(y).$$

On considère l'algorithme suivant (appelé dans la suite PGA pour *Pure Greedy Algorithm*): On pose $f_0 = f$ et on itère sur $n \geq 1$:

1. Trouver $r_n \in H_0^1(\Omega_x)$ et $s_n \in H_0^1(\Omega_y)$ tel que (r_n, s_n) réalise le minimum (sur $H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$) de $(r, s) \mapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla(r \otimes s)|^2 - \int_\Omega f_{n-1} r \otimes s$. *(On admettra dans la suite qu'il existe bien, à chaque itération, un tel couple (r_n, s_n), et que $r_n \otimes s_n = 0$ si et seulement si $f_{n-1} = 0$.)*

2. Poser $f_n = f_{n-1} + \Delta(r_n \otimes s_n)$.

On se place à l'itération n, et on considère un couple (r_n, s_n) tel que

$$J_n(r_n \otimes s_n) = \min_{(r,s)\in H_0^1(\Omega_x)\times H_0^1(\Omega_y)} J_n(r \otimes s).$$

où on a noté

$$J_n(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f_{n-1} v.$$

Question 4. Soit $(r, s) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, (dans la limite $\varepsilon \to 0$),

$$J_n((r_n + \varepsilon r) \otimes (s_n + \varepsilon s)) = J_n(r_n \otimes s_n) + \varepsilon I_1 + \varepsilon^2 I_2 + O(\varepsilon^3)$$

où on identifiera les termes I_1 et I_2 en fonction de r_n, s_n, r, s et f_{n-1}.

Question 5. En déduire que (r_n, s_n) est tel que, pour tout couple $(r, s) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$,

$$\int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(r_n \otimes s + r \otimes s_n) = \int_\Omega f_{n-1}(r_n \otimes s + r \otimes s_n). \tag{3}$$

Question 6. Montrer que le couple $(r_n, s_n) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$ est solution du problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left(\displaystyle\int_{\Omega_y} (s_n)^2\right) \Delta r_n + \left(\displaystyle\int_{\Omega_y} |\nabla s_n|^2\right) r_n = \displaystyle\int_{\Omega_y} f_{n-1} s_n, \\ -\left(\displaystyle\int_{\Omega_x} (r_n)^2\right) \Delta s_n + \left(\displaystyle\int_{\Omega_x} |\nabla r_n|^2\right) s_n = \displaystyle\int_{\Omega_x} f_{n-1} r_n. \end{array} \right. \tag{4}$$

Question 7. Proposer un algorithme itératif pour résoudre le problème (4). On ne cherchera pas à prouver sa convergence. Commenter l'intérêt de cette méthode numérique, en comparaison d'une approche standard de type Galerkin pour résoudre (1) en dimension $d = 4$.

On s'intéresse maintenant à la convergence de la méthode, c'est-à-dire à la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} r_n \otimes s_n$, où les (r_n, s_n) sont construits par l'algorithme PGA.

Soit g_n la solution du problème:

$$\left\{ \begin{array}{r} -\Delta g_n = f_n \text{ dans } \Omega, \\ g_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{5}$$

Question 8. Montrer que $J_n(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(v - g_{n-1})|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2$. Montrer que $g_n = g_{n-1} - r_n \otimes s_n$ et en déduire que $g_n = u - \sum_{k=1}^n r_k \otimes s_k$.

Prouver la convergence de la méthode revient donc à prouver que g_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Question 9. En utilisant (3), montrer que pour tout couple $(r, s) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$,

$$\int_\Omega \nabla g_n \cdot \nabla(r_n \otimes s + r \otimes s_n) = 0.$$

En déduire que

$$\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(r_n \otimes s_n) = \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2. \tag{6}$$

Question 10. Montrer que

$$\int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 = \int_\Omega |\nabla g_n|^2 + \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2.$$

Que dire de la suite $\left(\int_\Omega |\nabla g_n|^2\right)_{n\geq 1}$ et de la série $\sum_{n\geq 1}\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2$?

Question 11. On note $E_n = J_n(r_n \otimes s_n)$. Montrer que $E_n = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2$. Que dire de la série $\sum_{n\geq 1} E_n$?

On admettra le résultat suivant: le fait que la suite g_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ implique (quitte à extraire une sous-suite) qu'il existe une fonction $g_\infty \in H_0^1(\Omega)$ telle que g_n converge faiblement vers g_∞: pour toute fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla g_n \cdot \nabla v = \int_\Omega \nabla g_\infty \cdot \nabla v.$$

Question 12. Montrer que pour tout couple $(r, s) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r \otimes s)|^2 - \int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(r \otimes s) \geq E_n.$$

En déduire que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r \otimes s)|^2 - \int_\Omega \nabla g_\infty \cdot \nabla(r \otimes s) \geq 0.$$

Question 13. Montrer que pour tout couple $(r, s) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$,

$$\int_\Omega \nabla g_\infty \cdot \nabla(r \otimes s) = 0.$$

En admettant que $\mathrm{Vect}(H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y))$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, en déduire que $g_\infty = 0$.

Le fait qu'il n'existe qu'une seule limite possible implique que la suite g_n (et non pas seulement une sous-suite) converge faiblement vers 0. On cherche maintenant à montrer la convergence de g_n vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$.

Pour un n fixé, on note

$$M_{n-1} = \sup \left\{ \int_\Omega \nabla(r \otimes s) \cdot \nabla g_{n-1},\ (r, s) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y) \text{ tel que } \int_\Omega |\nabla(r \otimes s)|^2 = 1 \right\}.$$

Question 14. Vérifier que:

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla g_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2\right)^{1/2}} \leq M_{n-1}.$$

Soit une suite maximisante associée à M_{n-1}, c'est-à-dire une suite $(u_k, v_k)_{k\geq 1}$ telle que $(u_k, v_k) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$, $\int_\Omega |\nabla(u_k \otimes v_k)|^2 = 1$ et

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \nabla(u_k \otimes v_k) \cdot \nabla g_{n-1} = M_{n-1}.$$

Question 15. Montrer les relations suivantes:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(g_{n-1} - r_n \otimes s_n)|^2 &\leq \int_\Omega \left| \nabla \left(g_{n-1} - \left(\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(u_k \otimes v_k) \right) u_k \otimes v_k \right) \right|^2 \\ &= \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 - \left(\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(u_k \otimes v_k) \right)^2.\end{aligned}$$

En déduire que

$$\int_\Omega |\nabla(g_{n-1} - r_n \otimes s_n)|^2 \leq \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 - M_{n-1}^2.$$

Question 16. En déduire que

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n)\cdot\nabla g_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2\right)^{1/2}} = M_{n-1},$$

et donc que

$$M_{n-1} = \left(\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Question 17. Soit deux indices $n > m \geq 1$. Montrer que

$$\int_\Omega |\nabla(g_n - g_m)|^2 = \int_\Omega |\nabla g_m|^2 - \int_\Omega |\nabla g_n|^2 - 2\sum_{k=m+1}^{n}\int_\Omega \nabla(r_k \otimes s_k)\cdot\nabla g_n.$$

En utilisant (6) et (7), en déduire que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(g_n - g_m)|^2 \leq \int_\Omega |\nabla g_m|^2 - \int_\Omega |\nabla g_n|^2 \\ + 2\sum_{k=m+1}^{n}\left(\int_\Omega |\nabla(r_k \otimes s_k)|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla(r_{n+1} \otimes s_{n+1})|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Question 18. On note $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = \min\left\{n > \phi(1) \text{ t.q. } \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2 \leq \int_\Omega |\nabla(r_{\phi(1)} \otimes s_{\phi(1)})|^2\right\}$ et, de manière générale

$$\phi(k+1) = \min\left\{n > \phi(k) \text{ t.q. } \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2 \leq \int_\Omega |\nabla(r_{\phi(k)} \otimes s_{\phi(k)})|^2\right\}.$$

Montrer que pour $l > k \geq 1$,

$$\int_\Omega |\nabla(g_{\phi(l)-1} - g_{\phi(k)-1})|^2 \leq \int_\Omega |\nabla g_{\phi(k)-1}|^2 - \int_\Omega |\nabla g_{\phi(l)-1}|^2 + 2\sum_{i=\phi(k)}^{\phi(l)-1}\int_\Omega |\nabla(r_i \otimes s_i)|^2.$$

En déduire que la suite $(g_{\phi(k)-1})_{k\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$.

Question 19. Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla g_n|^2 = 0.$$