Méthodes Déterministes en Finance

6 Février 2012

Corrigé

Question de cours 1.

La dynamique du sous-jacent dans le modèle de Black Scholes est, sous la probabilité risque neutre,

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t).$$

On note $A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_s\,ds$ la moyenne du sous-jacent sur $[0,t]$. La variables aléatoire $\varphi(S_T, A_T)$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable (où $\mathcal{F}_t$ désigne la filtration engendrée par le brownien (W_t)). Par des arguments standards (absence d'opportunité d'arbitrage et construction d'un portefeuille de réplication), le prix de l'option à l'instant t est donc

$$P_t = \mathbb{E}\left(\exp(-r(T-t))\varphi(S_T, A_T)\middle|\mathcal{F}_t\right).$$

On a

$$dA_t = \frac{1}{t}(-A_t + S_t),$$

et donc le couple (S_t, A_t) est solution d'une équation différentielle stochastique. On en déduit en particulier que le couple (S_t, A_t) est markovien. Ceci implique qu'il existe une fonction $p(t,s,a)$ telle que

$$P_t = \mathbb{E}\left(\exp(-r(T-t))\varphi(S_T, A_T)\middle|\mathcal{F}_t\right) = p(t, S_t, A_t).$$

Pour trouver l'équation aux dérivées partielles satisfaites par p, on utilise le fait que le prix actualisé est une martingale. Par un calcul d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
&d\left(\exp(-rt)p(t,S_t,A_t)\right)\\
&\quad= \exp(-rt)\left(-rp + \frac{\partial p}{\partial t} + rs\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \frac{1}{t}(-a+s)\frac{\partial p}{\partial a}\right)\Big|_{(t,s=S_t,a=A_t)} dt\\
&\qquad+ \exp(-rt)S_t\sigma\frac{\partial p}{\partial s}(t,S_t,A_t)dW_t.
\end{aligned}$$

Le fait que le prix actualisé est une martingale implique donc que p satisfait l'EDP:

$$\begin{cases}
-rp + \dfrac{\partial p}{\partial t} + rs\dfrac{\partial p}{\partial s} + \dfrac{\sigma^2 s^2}{2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \dfrac{1}{t}(-a+s)\dfrac{\partial p}{\partial a} = 0,\\
p(T,s,a) = \varphi(s,a),
\end{cases}$$

puisqu'il faut annuler la partie à variation bornée, en facteur de dt, dans $d\left(\exp(-rt)p(t,S_t,A_t)\right)$.

Question de cours 2.

(i) On introduit un pas de temps $\Delta t = \frac{T}{N}$ et d'espace $\Delta s = \frac{S_{max} - S_{min}}{I+1}$. On note $s_j = S_{min} + j\Delta s$, $t_n = n\Delta t$ et U_j^n l'approximation de $v(t_n, s_j)$. Le schéma Euler Implicite (avec décentrage à droite) s'écrit alors: pour $n = (N-1), \ldots, 2, 1, 0$ et pour $j \in \{1, \ldots, I\}$:

$$\min\left(-\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - \alpha_j \left(U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n\right) - \beta_j \left(U_{j+1}^n - U_j^n\right) + rU_j^n,\ \left(U_j^n - g_j\right)\right) = 0,$$
$$U_0^n = u_g(t_n),\ U_{I+1}^n = u_d(t_n)$$

avec la condition terminale $U_j^N = \varphi(s_j)$, les fonctions u_g et u_d sont données, $\alpha_j = \frac{1}{2}s_j^2\sigma^2/\Delta s^2$, $\beta_j = rs_j/\Delta s$, et $g_j = \varphi(s_j)$.

A chaque pas de temps, pour (U_j^{n+1}) donné, le vecteur $x = (U_j^n)_{j=1,\ldots,I}$ est solution d'un problème non-linéaire de la forme:

$$F(x) = \min(Bx - b, x - g) = 0,\ x \in \mathbb{R}^I,$$

où b est un vecteur dans $\mathbb{R}^I$ et B est la matrice tridiagonale

$$B = \text{tridiag}\left(-\alpha_j, \frac{1}{\Delta t} + (2\alpha_j + \beta_j + r),\ -(\alpha_j + \beta_j)\right).$$

Le fait que B soit une M-matrice assure l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que le fait que la méthode de Newton converge vers la solution quelque soit la condition initiale. De plus, le fait que B soit à diagonale dominante avec $B_{ii} > 0$ assure l'existence et l'unicité de la solution en utilisant l'algorithme PSOR.

(ii) Le schéma de splitting consiste à d'abord chercher, pour $n = (N-1), \ldots, 2, 1, 0$, $U^{n,1}$ solution de: pour tout $j \in \{1, \ldots, I\}$,

$$-\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n,1}}{\Delta t} - \alpha_j(U_{j-1}^{n,1} - 2U_j^{n,1} + U_{j+1}^{n,1}) - \beta_j(U_{j+1}^{n,1} - U_j^{n,1}) + rU_j^{n,1} = 0$$
$$U_0^{n,1} = u_g(t_n),\ U_{I+1}^{n,1} = u_d(t_n)$$

puis à poser

$$U_j^n = \max(U_j^{n,1}, g_j).$$

Problème.

Question 1. On a vu en cours l'EDP satisfaite par p, qui s'écrit:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^d rS^i \frac{\partial P}{\partial S^i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \sigma_i\sigma_j\rho_{i,j}S^iS^j \frac{\partial^2 P}{\partial S^i \partial S^j} - rP = 0, \\ P(T, S) = \varphi(S^1, \ldots, S^d), \end{cases}$$

avec $\rho_{i,i} = 1$, et $\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$ la corrélation entre l'actif i et l'actif j.

Il est difficile de résoudre cette EDP par des méthodes standards, car typiquement le nombre d'inconnues dépend exponentiellement de la dimension d. Par exemple, pour une méthode de différences finies, avec N points par dimension, le nombre d'inconnues est N^d.

Question 2. La formulation variationnelle standard pour le problème de Poisson est: trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v.$$

Si on munit $H_0^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v,$$

(noter que $u \mapsto \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$ est bien une norme sur $H_0^1(\Omega)$ en vertu du Lemme de Poincaré), la formulation variationnelle admet alors une unique solution par le théorème de Riesz, puisque $v \in H_0^1(\Omega) \mapsto \int_\Omega f v$ est une forme linéaire continue. *(On peut aussi invoquer le théorème de Lax-Milgram.)*

Question 3. On a:

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla (v-u)|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

On voit donc que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $J(v) \geq -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$. De plus, $J(u) = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$. Par conséquent,

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v) = J(u) = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Le minimum de J est unique puisque $J(v) = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$ implique $\int_\Omega |\nabla (v-u)|^2 = 0$ et donc $v = u$ (puisque $(v-u) \in H_0^1(\Omega)$).

On se place à l'itération n, et on considère un couple (r_n, s_n) tel que

$$J_n(r_n \otimes s_n) = \min_{(r,s) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)} J_n(r \otimes s).$$

où on a noté

$$J_n(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f_{n-1} v.$$

Question 4. On a:

$$\begin{aligned}
&J_n((r_n+\varepsilon r)\otimes(s_n+\varepsilon s))\\
&=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla((r_n+\varepsilon r)\otimes(s_n+\varepsilon s))|^2-\int_\Omega f_{n-1}((r_n+\varepsilon r)\otimes(s_n+\varepsilon s))\\
&=J_n(r_n\otimes s_n)\\
&\quad+\varepsilon\left(\int_\Omega \nabla(r_n\otimes s_n)\cdot\nabla(r_n\otimes s+r\otimes s_n)-\int_\Omega f_{n-1}(r_n\otimes s+r\otimes s_n)\right)\\
&\quad+\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r_n\otimes s+r\otimes s_n)|^2+\int_\Omega \nabla(r_n\otimes s_n)\cdot\nabla(r\otimes s)-\int_\Omega f_{n-1}r\otimes s\right)\\
&\quad+O(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

où on identifie I_1 et I_2.

Question 5. On a, pour $(r,s)\in H_0^1(\Omega_x)\times H_0^1(\Omega_y)$, et pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}$,

$$J_n((r_n+\varepsilon r)\otimes(s_n+\varepsilon s))\geq J_n(r_n\otimes s_n)$$

et donc, avec les notations de la question précédente:

$$\varepsilon I_1+\varepsilon^2 I_2+O(\varepsilon^3)\geq 0.$$

On considérant la limite $\varepsilon\to 0$, on voit que nécessairement, $I_1=0$ (on peut par exemple raisonner par l'absurde pour le vérifier), soit

$$\int_\Omega \nabla(r_n\otimes s_n)\cdot\nabla(r_n\otimes s+r\otimes s_n)=\int_\Omega f_{n-1}(r_n\otimes s+r\otimes s_n).$$

Question 6. En utilisant comme fonctions tests dans (3) $r\in H_0^1(\Omega_x)$ et $s=0$, on a:

$$\int_\Omega \nabla(r_n\otimes s_n)\cdot\nabla(r\otimes s_n)=\int_\Omega f_{n-1}(r\otimes s_n).$$

En utilisant Fubini, on a donc, au membre de gauche:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(r_n\otimes s_n)\cdot\nabla(r\otimes s_n)&=\int_\Omega (\nabla r_n\cdot\nabla r)\otimes s_n^2+(r_n r)\otimes|\nabla s_n|^2\\
&=\left(\int_{\Omega_x}\nabla r_n\cdot\nabla r\right)\left(\int_{\Omega_y}s_n^2\right)+\left(\int_{\Omega_x}r_n r\right)\left(\int_{\Omega_y}|\nabla s_n|^2\right).
\end{aligned}$$

Au membre de droite, on a:

$$\int_\Omega f_{n-1}(r\otimes s_n)=\int_{\Omega_x}\left(\int_{\Omega_y}f_{n-1}s_n\right)r.$$

On a donc, pour tout $r \in H_0^1(\Omega_x)$,

$$\left(\int_{\Omega_x} \nabla r_n \cdot \nabla r\right)\left(\int_{\Omega_y} s_n^2\right) + \left(\int_{\Omega_x} r_n r\right)\left(\int_{\Omega_y} |\nabla s_n|^2\right) = \int_{\Omega_x} \left(\int_{\Omega_y} f_{n-1} s_n\right) r$$

qui est une formulation faible du problème

$$-\left(\int_{\Omega_y} s_n^2\right) \Delta r_n + \left(\int_{\Omega_y} |\nabla s_n|^2\right) r_n = \int_{\Omega_y} f_{n-1} s_n.$$

C'est la première équation de (4). La deuxième s'obtient de manière similaire en prenant comme fonctions tests dans (4) $r = 0$ et $s \in H_0^1(\Omega_x)$.

Question 7. On peut par exemple penser utiliser une méthode de point fixe: pour $k \geq 1$,

$$\begin{cases} -\left(\displaystyle\int_{\Omega_y} (s_n^k)^2\right) \Delta r_n^{k+1} + \left(\displaystyle\int_{\Omega_y} |\nabla s_n^k|^2\right) r_n^{k+1} = \displaystyle\int_{\Omega_y} f_{n-1} s_n^k, \\ -\left(\displaystyle\int_{\Omega_x} (r_n^{k+1})^2\right) \Delta s_n^{k+1} + \left(\displaystyle\int_{\Omega_x} |\nabla r_n^{k+1}|^2\right) s_n^{k+1} = \displaystyle\int_{\Omega_x} f_{n-1} r_n^{k+1}. \end{cases}$$

On voit qu'on a remplacé la résolution d'un problème linéaire en dimension 4 (le problème de Poisson initial (1)), par la résolution d'un problème non-linéaire qui couple deux équations elliptiques en dimension 2 (le problème (4)). L'intérêt de cette méthode est donc qu'elle permet de proposer une méthode de résolution d'une EDP en dimension $d > 3$, là où des approches standards sont difficiles à appliquer.

Question 8. C'est essentiellement le même calcul qu'à la question 3. On a:

$$\begin{aligned} J_n(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f_{n-1} v \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega \nabla g_n \cdot \nabla v \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla (v - g_{n-1})|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} -\Delta(g_{n-1} - r_n \otimes s_n) &= -\Delta g_{n-1} + \Delta r_n \otimes s_n \\ &= f_{n-1} + \Delta r_n \otimes s_n \\ &= f_n. \end{aligned}$$

Par unicité de la solution au problème (5) (noter que $g_{n-1} - r_n \otimes s_n \in H_0^1(\Omega)$), on a donc

$$g_n = g_{n-1} - r_n \otimes s_n.$$

Par récurrence, on en déduit que

$$g_n = u - \sum_{k=1}^{n} r_k \otimes s_k,$$

puisque $f_0 = f$ et donc $g_0 = u$.

Question 9. On a:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla g_n \cdot \nabla(r_n \otimes s + r \otimes s_n) &= \int_\Omega \nabla(g_{n-1} - r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(r_n \otimes s + r \otimes s_n) \\
&= \int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(r_n \otimes s + r \otimes s_n) - \int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(r_n \otimes s + r \otimes s_n) \\
&= \int_\Omega f_{n-1}(r_n \otimes s + r \otimes s_n) - \int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(r_n \otimes s + r \otimes s_n) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'après (3). En prenant comme fonctions tests $r = 0$ et $s = s_n$, on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla(g_{n-1} - r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(r_n \otimes s_n) = 0,$$

soit

$$\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(r_n \otimes s_n) = \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2.$$

Question 10. On a:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla g_n|^2 &= \int_\Omega |\nabla g_{n-1} - r_n \otimes s_n|^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 + \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2 - 2\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(r_n \otimes s_n) \\
&= \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 + \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2 - 2\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 - \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2.
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite $\left(\int_\Omega |\nabla g_n|^2\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et donc convergente puique minorée par zéro. De plus, comme $\sum_{n=1}^{N} \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2 = \int_\Omega |\nabla g_N|^2 - \int_\Omega |\nabla g_0|^2$, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2$ est convergente. En particulier, $\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2$ converge vers 0 quand $n \to \infty$.

Question 11. On a

$$\begin{aligned}
E_n &= J_n(r_n \otimes s_n) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n - g_{n-1})|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla g_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2.
\end{aligned}$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2$ est convergente, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} E_n$ est convergente. En particulier, $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$.

Question 12. Pour tout couple $(r,s) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$, on a $J_n(r\otimes s) \geq J_n(r_n \otimes s_n)$, par définition du couple (r_n, s_n). Or, $J_n(r_n \otimes s_n) = E_n$ et

$$\begin{aligned}
J_n(r\otimes s) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r\otimes s)|^2 - \int_\Omega f_{n-1}(r\otimes s) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r\otimes s)|^2 - \int_\Omega \nabla g_{n-1}\cdot\nabla(r\otimes s).
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r\otimes s)|^2 - \int_\Omega \nabla g_{n-1}\cdot\nabla(r\otimes s) \geq E_n.$$

En passant à la limite $n\to\infty$, en utilisant le fait que E_n tend vers 0 et que g_n converge faiblement vers g_∞, on a donc:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r\otimes s)|^2 - \int_\Omega \nabla g_\infty\cdot\nabla(r\otimes s) \geq 0.$$

Question 13. Pour un $\varepsilon \in \mathbb{R}$, en prenant $r = \varepsilon\tilde{r}$ et $s = \tilde{s}$ dans la relation précédente, on a:

$$\varepsilon^2\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\tilde{r}\otimes\tilde{s})|^2 - \varepsilon\int_\Omega \nabla g_\infty\cdot\nabla(\tilde{r}\otimes\tilde{s}) \geq 0.$$

En considérant la limite $\varepsilon\to 0$, on a donc, pour tout couple $(\tilde{r},\tilde{s}) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$,

$$\int_\Omega \nabla g_\infty\cdot\nabla(\tilde{r}\otimes\tilde{s}) = 0.$$

Puisque $\mathrm{Vect}(H_0^1(\Omega_x)\times H_0^1(\Omega_y))$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on a, pour tout fonction $v\in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla g_\infty\cdot\nabla v = 0.$$

En prenant $v = g_\infty$, on en déduit que $\nabla g_\infty = 0$ et donc

$$g_\infty = 0,$$

puisque $g_\infty \in H_0^1(\Omega)$.

Question 14. On pose $u = r_n \left(\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2 \right)^{-1/2}$ et $v = s_n$. On a $\int_\Omega |\nabla(u \otimes v)|^2 = 1$, et donc, par définition de M_{n-1}:

$$\begin{aligned} M_{n-1} &\geq \int_\Omega \nabla(u \otimes v) \cdot \nabla g_{n-1} \\ &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla g_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2 \right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Question 15. On sait que $J_n(r_n \otimes s_n) \leq J_n(r \otimes s)$ pour tout couple $(r, s) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$. Par ailleurs, $J_n(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla(v - g_{n-1})|^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2$. Par conséquent, pour tout couple $(r, s) \in H_0^1(\Omega_x) \times H_0^1(\Omega_y)$,

$$\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n - g_{n-1})|^2 \leq \int_\Omega |\nabla(r \otimes s - g_{n-1})|^2.$$

En particulier, pour le couple $(r, s) = \left(\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(u_k \otimes v_k) \right) u_k \otimes v_k$ on a donc

$$\int_\Omega |\nabla(g_{n-1} - r_n \otimes s_n)|^2 \leq \int_\Omega \left| \nabla \left(g_{n-1} - \left(\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(u_k \otimes v_k) \right) u_k \otimes v_k \right) \right|^2.$$

En développant le membre de droite, on a ensuite:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left| \nabla \left(g_{n-1} - \left(\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(u_k \otimes v_k) \right) u_k \otimes v_k \right) \right|^2 \\ &\quad = \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 - 2 \left(\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(u_k \otimes v_k) \right)^2 + \left(\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(u_k \otimes v_k) \right)^2 \int_\Omega |\nabla(u_k \otimes v_k)|^2 \\ &\quad = \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 - \left(\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(u_k \otimes v_k) \right)^2, \end{aligned}$$

psuique $\int_\Omega |\nabla(u_k \otimes v_k)|^2 = 1$. En passant à la limite $k \to \infty$ dans l'inégalité

$$\int_\Omega |\nabla(g_{n-1} - r_n \otimes s_n)|^2 \leq \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 - \left(\int_\Omega \nabla g_{n-1} \cdot \nabla(u_k \otimes v_k) \right)^2,$$

on obtient donc:

$$\int_\Omega |\nabla(g_{n-1} - r_n \otimes s_n)|^2 \leq \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 - (M_{n-1})^2.$$

Question 16. On sait (cf. question 14) que

$$M_{n-1} \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla g_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2\right)^{1/2}}.$$

De plus, on a (cf. questions 15, 8 et 10, puis Equation (6))

$$\begin{aligned}
(M_{n-1})^2 &\leq \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 - \int_\Omega |\nabla(g_{n-1} - r_n \otimes s_n)|^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 - \int_\Omega |\nabla g_n|^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2 \\
&= \frac{\left(\displaystyle\int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla g_{n-1}\right)^2}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$M_{n-1} \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla g_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2\right)^{1/2}}.$$

On en déduit que

$$M_{n-1} = \frac{\displaystyle\int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla g_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2\right)^{1/2}}.$$

Noter, par (6), qu'on a aussi

$$M_{n-1} = \left(\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2\right)^{1/2}.$$

Question 17. Soit deux indices $n > m \geq 1$. On a (cf. question 8)

$$g_n = g_m - \sum_{k=m+1}^{n} \nabla(r_k \otimes s_k).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(g_n - g_m)|^2 &= \int_\Omega |\nabla g_n|^2 + \int_\Omega |\nabla g_m|^2 - 2\int_\Omega \nabla g_n \cdot \nabla g_m \\ &= \int_\Omega |\nabla g_n|^2 + \int_\Omega |\nabla g_m|^2 \\ &\quad - 2\int_\Omega \nabla g_n \cdot \nabla\left(g_n + \sum_{k=m+1}^{n} \nabla(r_k \otimes s_k)\right) \\ &= -\int_\Omega |\nabla g_n|^2 + \int_\Omega |\nabla g_m|^2 - 2\sum_{k=m+1}^{n}\int_\Omega \nabla(r_k \otimes s_k)\cdot \nabla g_n.\end{aligned}$$

Par définition de M_n, on a

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \nabla(r_k \otimes s_k)\cdot\nabla g_n &\le M_n\left(\int_\Omega |\nabla(r_k \otimes s_k)|^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_\Omega |\nabla(r_{n+1}\otimes s_{n+1})|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla(r_k \otimes s_k)|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(g_n - g_m)|^2 &\le \int_\Omega |\nabla g_m|^2 - \int_\Omega |\nabla g_n|^2 \\ &\quad + 2\sum_{k=m+1}^{n}\left(\int_\Omega |\nabla(r_k \otimes s_k)|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla(r_{n+1}\otimes s_{n+1})|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Question 18. Puisque $\int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2$ converge vers 0, on a $\lim_{k\to\infty}\phi(k) = +\infty$. De plus, on remarque que pour $i \in \{1,\ldots,\phi(k)\}$,

$$\int_\Omega |\nabla(r_i \otimes s_i)|^2 \ge \int_\Omega |\nabla(r_{\phi(k)} \otimes s_{\phi(k)})|^2.$$

On en déduit que, pour $l > k \ge 1$,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla(g_{\phi(l)-1} - g_{\phi(k)-1})|^2 \\ &\le \int_\Omega |\nabla g_{\phi(k)-1}|^2 - \int_\Omega |\nabla g_{\phi(l)-1}|^2 \\ &\quad + 2\sum_{i=\phi(k)}^{\phi(l)-1}\left(\int_\Omega |\nabla(r_i \otimes s_i)|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla(r_{\phi(l)} \otimes s_{\phi(l)})|^2\right)^{1/2} \\ &\le \int_\Omega |\nabla g_{\phi(k)-1}|^2 - \int_\Omega |\nabla g_{\phi(l)-1}|^2 + 2\sum_{i=\phi(k)}^{\phi(l)-1}\int_\Omega |\nabla(r_i \otimes s_i)|^2.\end{aligned}$$

On sait que la suite $\int_\Omega |\nabla g_n|^2$ est convergente (cf. question 10) et que la série $\sum_{i\geq 1}\int_\Omega |\nabla(r_i\otimes s_i)|^2$ est convergente (cf. question 10), donc le terme de droite est aussi petit que l'on veut pour $l>k$ assez grand. La suite $(g_{\phi(k)-1})_{k\geq 1}$ est donc de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$.

Question 19. Puisque $(g_{\phi(k)-1})$ est de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$, elle converge vers une fonction g_∞. Or on sait que $(g_{\phi(k)-1})$ (en fait (g_n)) converge faiblement vers 0, et donc $g_\infty = 0$. En effet, la convergence forte implique la convergence faible par Cauchy Schwarz. On a donc que $\int_\Omega |\nabla g_{\phi(k)-1}|^2$ converge vers 0. Mais comme par ailleurs, on sait que $\int_\Omega |\nabla g_n|^2$ est convergente, c'est nécessairement vers la même limite:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla g_n|^2 = 0.$$

On donc montré la convergence de (g_n) vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$.

Pour en savoir plus, on pourra consulter les articles suivants:

- *C. Le Bris, T. Lelièvre et Y. Maday,* Results and questions on a nonlinear approximation approach for solving high-dimensional partial differential equations, *Constructive Approximation, 30(3), 621-651, (2009).*

- *E. Cancès, V. Ehrlacher et T. Lelièvre,* Convergence of a greedy algorithm for high-dimensional convex nonlinear problems, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 21(12), 2433-2467, (2011).*