Méthodes Déterministes en Finance
11 Février 2013

Durée: 3 heures.

Les notes de cours manuscrites sont autorisées. Veuillez rédiger la partie "Questions de cours" et la partie "Problème" sur deux copies séparées.

Questions de cours: méthodes d'arbre.

Les trois questions sont indépendantes.

Question 1. Soit $(S_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace fini ou dénombrable $\mathcal{E}$, de matrice de transition $P(x,y)$. Soit Φ une fonction bornée. On considère u la solution de

$$\begin{cases} u(N,x) &= \phi(x), x \in \mathcal{E} \\ u(n,x) &= \max\left(\sum_{y\in\mathcal{E}} P(x,y)\, u(n+1,y), \phi(x)\right), x \in \mathcal{E}, 0 \leq n \leq N. \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que, pour tout n tel que $0 \leq n \leq N$, on a

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{n,N}} \mathbb{E}\left[\phi(S_\tau)|\mathcal{F}_n\right] = u(n, S_n).$$

Question 2. On considère l'arbre trinomial de Kamrad-Ritchken

$$\log S_{(n+1)\Delta T} = \begin{cases} \log S_{n\Delta T} + \log u & \text{avec probabilité } p_u, \\ \log S_{n\Delta T} & \text{avec probabilité } p_m, \\ \log S_{n\Delta T} + \log d & \text{avec probabilité } p_d, \end{cases} \tag{2}$$

où $u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = \frac{1}{u}$, $\Delta t = T/N$ et $\lambda \geq 1$.

Calculer les probabilités p_u, p_m, p_d pour que ce modèle trinomial converge en loi vers le modèle de Black-Scholes.

Question 3. Montrer comment utiliser une méthode d'arbre pour calculer le prix d'une option d'échange de payoff $(S_T^1 - S_T^2)_+$, dans le modèle de Black-Scholes en dimension 2:

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = rdt + \sigma_i dW_t^i, \quad S_0^i = x_i, \quad i = 1, 2$$

où les deux mouvements browniens sont corrélés:

$$d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho dt.$$

Problème.

Soit $X_\tau = X_\tau^{t,x}$ un processus stochastique à valeurs réelles tel que $X_t^{t,x} = x$ et évoluant suivant la dynamique

$$dX_\tau = b\, d\tau + \sigma\, dW_\tau, \ \tau \geq t$$

où $b \in \mathbb{R}$ est une constante, $\sigma > 0$ est une constante et W_τ est un mouvement brownien.

On s'intéresse à la valeur d'une option de type américain, de fonction de payoff φ, de maturité T, définie pour $t \leq T$ par

$$u(t, x) := \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}} \mathbb{E}\big(\varphi(X_\tau^{t,x}) | \mathcal{F}_t\big) \tag{3}$$

(sans facteur d'actualisation). Dans toute la suite du problème on pourra supposer que $u \in C^{1,2}$ (u de classe C^1 en temps et de classe C^2 en espace) lorsque cela est nécessaire. On note $\mathcal{A}$ l'opérateur aux dérivées partielles

$$\mathcal{A}u := -\frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} u - b\, \partial_x u.$$

Question 1. Soit $t < T$. Montrer que pout tout $h > 0$, t.q. $t + h \leq T$, on a

$$\mathbb{E}\big(u(t + h, X_{t+h}^{t,x})\big) \leq u(t, x).$$

(On pourra utiliser la définition (3)*, et commencer par montrer que pour tout* $\epsilon > 0$, $\exists \tau_\epsilon \in \mathcal{T}_{[t+h,T]}$ *t.q.* $u(t + h, X_{t+h}^{t,x}) \leq \mathbb{E}(u(\tau_\epsilon, X_{\tau_\epsilon}^{t,x})|\ \mathcal{F}_{t+h}) + \epsilon$.*)* En déduire l'inéquation, pour $t < T$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$-\partial_t u + \mathcal{A}u \geq 0.$$

Question 2. Montrer que $u(t,x) \geq u(t+h,x)$. En déduire l'inéquation:

$$\min(-\partial_t u + \mathcal{A}u, -\partial_t u) \geq 0. \tag{4}$$

Question 3. On désire établir l'EDP

$$\min(-\partial_t u + \mathcal{A}u, -\partial_t u) = 0. \tag{5}$$

On supposera que $-\partial_t u(t,x) > 0$, sinon le résultat est évident.

(i) Montrer $u(t,x) > \varphi(x)$.

(ii) On note $\tau^*_{t,x}$ le temps d'arrêt optimal, défini par

$$\tau^*_{t,x} := \min\{\tau \geq t,\ u(\tau, X^{t,x}_\tau) = \varphi(X^{t,x}_\tau)\},$$

et on admettra le principe de programmation dynamique suivant:

$$u(t,x) = \mathbb{E}(u(\tau^*_{t,x}, X^{t,x}_{\tau^*_{t,x}})|\mathcal{F}_t\big).$$

A l'aide du calcul d'Itô, montrer que, $p.s$,

$$\forall \tau \in (0, \tau^*_{t,x}), \quad (-\partial_t u + \mathcal{A}u)(\tau, X^{t,x}_\tau) = 0.$$

(iii) Montrer qu'on ne peut avoir $\tau^*_{t,x} = t$ p.s.

(iv) En déduire que $-\partial_t u + \mathcal{A}u = 0$ au point (t,x), et conclure.

On propose un schéma aux différences finies pour (5). Après renversement du temps $v(t,x) = u(T-t,x)$, et en considérant un domaine tronqué $\Omega = (X_{\min}, X_{\max})$, on se ramène à l'étude de l'EDP suivante:

$$\min(\partial_t v + \mathcal{A}v, \partial_t v) = 0, \quad t \in (0,T),\ x \in \Omega, \tag{6}$$

$$v(t, X_{\min}) = v_g, \quad v(t, X_{\max}) = v_d, \tag{7}$$

$$v(0,x) = \varphi(x). \tag{8}$$

Pour simplifier on supposera aussi dans la suite que

$$b = 0,\ \sigma^2 = 2, \text{ ainsi que } v_g = v_d \equiv 0.$$

L'EDP sur v s'écrit alors

$$\partial_t v + \min(-\partial_{xx} v,\ 0) = 0. \tag{9}$$

On s'intéresse à l'approximation de cette EDP. Soit $I \geq 1$ un entier, $\Delta x := \frac{X_{\max}-X_{\min}}{I+1}$ et $x_j = X_{\min} + j\Delta x$ pour $j = 1, \ldots, I$, ainsi que $\delta t = \frac{T}{N}$ et $t_n = n\delta t$. On considère le schéma suivant:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\delta t} + \min\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{U_{j-1}^{n} - 2U_j^{n} + U_{j+1}^{n}}{\Delta x^2}\right),\ 0\right\} = 0.$$

$$0 \leq n \leq N-1,\ 1 \leq j \leq I, \tag{10}$$

$$U_0^n = v_g = 0, \quad U_{I+1}^n = v_d = 0 \tag{11}$$

$$U_j^0 = \varphi(x_j). \tag{12}$$

(U_j^n représente une approximation de la valeur exacte $v(t_n, x_j)$.)

Etant donnés $U = (U_i)$ et $V = (V_i)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^I$, on notera $U \leq V$ lorsque $\forall i$, $U_i \leq V_i$, et on notera $\min(U, V)$ le vecteur de composantes $\min(U_i, V_i)$.

Question 4. Montrer que le schéma s'écrit

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\delta t} + \min\left(\frac{1}{2}\left(AU^{n+1} + AU^n\right),\ 0\right) = 0, \tag{13}$$

où A est une matrice de $\mathbb{R}^{I\times I}$ à déterminer.

Dans la suite on notera

$$U^{n+1} = \mathcal{T}(U^n) \tag{14}$$

lorsque U^{n+1} est solution de (13).

Question 5. (Consistance) On pose $V_j^n = v(t_n, x_j)$, où v est une fonction supposée suffisament régulière. On définit l'opérateur suivant, à valeurs dans $\mathbb{R}^I$:

$$\mathcal{S}(V^n, V^{n+1}) := \frac{V^{n+1} - V^n}{\delta t} + \min\left(\frac{1}{2}\left(AV^{n+1} + AV^n\right),\ 0\right).$$

Montrer l'estimation de consistance suivante:

$$\left|\mathcal{S}(V^n, V^{n+1})_j - \left(\partial_t v(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + \min\left(-\partial_{xx} v(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j), 0\right)\right)\right| \leq C(\delta t^2 + \Delta x^2), \tag{15}$$

où $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\delta t}{2}$ et où C ne dépend que de v.

On s'intéresse maintenant à la résolution numérique du schéma (10) et à sa monotonie.

Question 6.

(i) Montrer que le schéma (13), d'inconnue $x = U^{n+1}$ (U^n étant supposé connu), peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\min(Bx - b, x - g) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^I \tag{16}$$

avec

$$B := I_d + \frac{1}{2}\delta t A,$$

où I_d est la matrice identité de même taille que A. On précisera les valeurs des vecteurs $b = b(U^n)$ et $g = g(U^n)$ de $\mathbb{R}^I$ en fonction des données du problème et de U^n.

(ii) Montrer que B est une M-matrice. (On rappelle que B est une M-matrice si $B_{ii} \geq 0$, $B_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j$, et s'il existe un $\delta > 0$ t.q. $\forall i$, $B_{ii} \geq \delta + \sum_{j \neq i} |B_{ij}|$).

(iii) Enoncer un résultat d'existence et d'unicité pour la solution de (16).

(iv) Proposer une méthode itérative efficace pour la résolution de (16), et donner une borne à priori sur le nombre d'itérations de la méthode.

Question 7. (Une propriété de monotonie) On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^I$ est

croissante, si $U \leq V \Rightarrow f(U) \leq f(V)$ (pour tous vecteurs U, V)

monotone, si $f(U) \leq f(V) \Rightarrow U \leq V$ (pour tous vecteurs U, V).

Dans cette partie on suppose la condition CFL

$$k := \frac{\delta t}{\Delta x^2} \leq 1. \tag{17}$$

(i) Vérifier que $U \to b(U)$ et $U \to g(U)$ sont croissantes.

(ii) On pose $F(x) = \min(Bx - b, x - g)$ pour b, g fixés. Etant donné $\alpha \in \{0,1\}^I$, on introduit les matrices $B(\alpha)$ de $\mathbb{R}^{I \times I}$ et vecteurs $b(\alpha)$ de $\mathbb{R}^I$ tels que

$$\begin{cases} B(\alpha)_{ij} = B_{ij}, \text{ et } b(\alpha)_i = b_i & \text{si } \alpha_i = 0, \\ B(\alpha)_{ij} = \delta_{ij}, \text{ et } b(\alpha)_i = g_i & \text{si } \alpha_i = 1. \end{cases}$$

On définit par ailleurs α_x dans $\{0,1\}^I$ par

$$\begin{cases} (\alpha_x)_i = 0 & \text{si } (Bx - b)_i \leq (x - g)_i, \\ (\alpha_x)_i = 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $F(x) = B(\alpha_x)x - b(\alpha_x)$ et que $F(x) \le B(\alpha)x - b(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \{0,1\}^I$.
(iii) Montrer que $x \to F(x)$ est monotone.
(iv) En déduire la propriété suivante (où l'on utilise la notation (14)):

$$U^n \le V^n \Rightarrow \quad \mathcal{T}(U^n) \le \mathcal{T}(V^n).$$

Question 8. (Stabilité) Toujours sous la condition CFL (17), montrer

$$\|U^{n+1}\|_\infty \le \|U^n\|_\infty.$$

Question 9. (Facultatif) Quel problème de contrôle stochastique pourrait-on associer à l'EDP (5) ?