Méthodes Déterministes en Finance

11 Février 2013

Corrigé

Méthodes d'arbre.

Question 1. Cf. le cours sur les méthodes d'arbre, pages 18 à 21.
Question 2. Cf. le cours sur les méthodes d'arbre, page 34.
Question 3. Cf. le cours sur les méthodes d'arbre, pages 70 à 72.

Problème.

Question 1. Par définition de $u(t+h, X^{t,x}_{t+h})$, et en utilisant que $X^{t+h,X^{t,x}_{t+h}}_\tau = X^{t,x}_\tau$ (pour $\tau \geq t+h$), on obtient l'existence d'un $\tau_\epsilon \in \mathcal{T}_{[t+h,T]}$ t.q. $u(t+h, X^{t,x}_{t+h}) \leq \mathbb{E}(\varphi(X^{t,x}_{\tau_\epsilon})|\,\mathcal{F}_{t+h})+\epsilon$. En prenant l'espérance depuis l'instant t, on obtient l'inégalité $\mathbb{E}(u(t+h), X^{t,x}_{t+h}) \leq \mathbb{E}(\varphi(X^{t,x}_{\tau_\epsilon})|\,\mathcal{F}_t)+\epsilon \leq u(t,x)+\epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit le résultat demandé. L'inéquation s'obtient alors à l'aide du calcul d'Ito et en supposant u de classe $C^{1,2}$.

Question 2. On a

$$
\begin{aligned}
u(t+h,x) &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[t+h,T]}} \mathbb{E}\big(\varphi(X^{t+h,x}_\tau)|\mathcal{F}_{t+h}\big) \\
&= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[t,T-h]}} \mathbb{E}\big(\varphi(X^{t+h,x}_{\tau+h})|\mathcal{F}_{t+h}\big) \\
&= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[t,T-h]}} \mathbb{E}\big(\varphi(X^{t,x}_\tau)|\mathcal{F}_t\big)
\end{aligned}
$$

car l'EDS pour le processus X_τ à des coefficients indépendant du temps (donc $X^{t+h,x}_{\tau+h} \equiv X^{t,x}_\tau$). Enfin comme $\mathcal{T}_{[t,T-h]} \subset \mathcal{T}_{[t,T]}$, on en déduit l'inégalité

$$
u(t+h,x) \;\leq\; \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[t,T]}} \mathbb{E}\big(\varphi(X^{t,x}_\tau)|\mathcal{F}_t\big) = u(t,x).
$$

Question 3. (i) On a pour h assez petit que $u(t,x) > u(t+h,x)$. Or $u(t+h,x) \geq \varphi(x)$ à partir de la définition. Donc $u(t,x) > \varphi(x)$.

(ii) Par Itô on a $0 = \mathbb{E}\left(\int_t^{\tau^*_{t,x}} (-\partial_t u + \mathcal{A}u)(\tau, X^{t,x}_\tau)d\tau\right)$, et en utilisant la Question 1, on obtient le résultat désiré.

(iii) si $\tau^*_{t,x} = t$ p.s., alors de la définition de $\tau^*_{t,x}$ et en utilisant la continuité de u, φ et de $\tau \to X^{t,x}_\tau$ on obtiendrait que $u(t,x) = \varphi(x)$ ce qui est contradictoire avec (i).

(iv) Ainsi $\{\omega,\, \tau^*_{t,x}(\omega) > t\}$ est de probabilité non nulle, et en utilisant (ii) on obtient le résultat désiré. On a donc montré que soit $-\partial_t u(t,x) = 0$, soit $-\partial_t u(t,x) + (\mathcal{A}u)(t,x) = 0$, CQFD.

Question 4. $A = \frac{1}{\Delta x^2} tridiag(-1, 2, -1)$.

Question 5. On note d'abord que

$$\frac{v(t_{n+1}, x_j) - v(t_n, x_j)}{\delta t} = \partial_t v(t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\delta t^2 \|\partial_{ttt} v\|_\infty). \tag{1}$$

Aussi $(AV^n)_j = \partial_{xx} v(t_n, x_j) + O(\Delta x^2 \|\partial_{xxxx} v\|_\infty)$, et $(AV^{n+1})_j = \partial_{xx} v(t_{n+1}, x_j) + O(\Delta x^2 \|\partial_{xxxx} v\|_\infty)$. En prenant la demi somme, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(AV^n + AV^{n+1})_j &= -\frac{1}{2}\Big(\partial_{xx} v(t_n, x_j) + \partial_{xx} v(t_{n+1}, x_j)\Big) + O(\Delta x^2 \|\partial_{xxxx} v\|_\infty) \\ &= -\partial_{xx} v(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j) + O(\delta t^2 \|\partial_{xxtt} v\|_\infty) + O(\Delta x^2 \|\partial_{xxxx} v\|_\infty) \end{aligned} \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), en utilisant le fait que $|\min(a+b, 0) - \min(a, 0)| \le |b|$), on obtient le résultat désiré.

Question 6.

(i) $g = g(U^n) := U^n$, $b = b(U^n) = (I_d - \frac{1}{2}\delta t A)U^n$.

(ii) Cours. $\delta = 1$ convient ici.

(iii) et *(iv)* On rappelle que $B = I + \frac{1}{2}\delta t A$ étant une M-matrice, on peut alors résoudre l'équation sur x à l'aide d'une méthode de Newton semi-smooth. On sait que la méthode converge en au plus I itérations (cas du problème d'obstacle avec B une M-matrice).

Question 7. *(i)* $b(U) = (I_d - \frac{\delta t}{2} A)U = tridiag(k/2,\ 1-k,\ k/2)U$ avec $0 \le k \le 1$ et donc b est croissante. $g(U) \equiv U$ aussi.

(ii) Si $(Bx - b)_i \le (x - g)_i$ alors, d'une part $F(x)_i = (Bx - b)_i$, et d'autre part $(\alpha_x)_i = 0$ et donc $(B(\alpha)x - b(\alpha))_i = (Bx - b)_i = F(x)_i$. On vérifie de même dans le cas $(Bx - b)_i > (x - g)_i$ que $(B(\alpha)x - b(\alpha))_i = F(x)_i$.

Par ailleurs, $F(x)_i = \min((Bx - b)_i, (x - g)_i) = \min_{\alpha_i = 0,1}(B(\alpha)x - b(\alpha))_i$, d'où le résultat.

(iii) Si $F(x) \le F(y)$, alors $B(\alpha_x)x - b(\alpha_x) = F(x) \le F(y) \le B(\alpha_x)y - b(\alpha_x)$. On en déduit que $B(\alpha_x)(y - x) \ge 0$. Comme $B(\alpha)$ est une M-matrice pour tout α, on a donc $B(\alpha_x)^{-1} \ge 0$ et $(y - x) \ge 0$, soit $x \le y$, CQFD.

(iv) Posons $b = b(U^n)$ et $g = g(U^n)$. De *(i)* on obtient $b \le b(V^n)$ et $g \le g(V^n)$, donc

$$\begin{aligned} F(U^{n+1}) &= \min(BU^{n+1} - b, U^{n+1} - g) \\ &= 0 \\ &= \min(BV^{n+1} - b(V^n), V^{n+1} - g(V^n)) \\ &\ge \min(BV^{n+1} - b(U^n), V^{n+1} - g(U^n)) = F(V^{n+1}) \end{aligned}$$

On déduit de *(iii)* que $U^{n+1} \le V^{n+1}$, ce qui est le résultat cherché.

Question 8. On peut utiliser le fait que pour $x = U^{n+1}$, $F(U^{n+1}) = 0 = B(\alpha_x)U^{n+1} - b(\alpha_x)$ On vérifie directement, sous la condition CFL, que $\|b(\alpha_x)\|_\infty \leq \|U^n\|_\infty$. D'autre part $B(\alpha_x)$ est aussi une matrice à diagonale dominante associée à un coefficient $\delta = 1$, donc $\|(B(\alpha_x)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\delta} = 1$ par résultat du cours, et au final $\|U^{n+1}\|_\infty = \|(B(\alpha_x))^{-1}b(\alpha_x)\|_\infty \leq 1 \times \|U^n\|_\infty$.

Question 9. $v(t,x) := \sup_\alpha \mathbb{E}(\varphi(X_T^{t,x,\alpha})|\mathcal{F}_t)$, le supremum étant sur les contrôles mesurables $\alpha \in L^2_{\mathcal{F}}(t,T)$ à valeur dans $[0,1]$ et $X_\tau = X_\tau^{t,x,\alpha}$ solution de $X_t = x$ et

$$dX_\tau = \alpha_\tau b d\tau + \alpha_\tau \sigma dW_\tau, \quad \tau \geq t.$$