Pricing d'options avec sauts.

Tony Lelièvre

On considère un sous-jacent qui vérifie, sous la probabilité risque neutre :

$$S_t = S_0 \exp\left((r + c - \sigma^2/2)t + X_t\right),$$

où X_t est un processus de Lévy de fonction caractéristique $\mathbb{E}(\exp(iuX_t)) = \exp(-t\psi(u))$ avec

$$\psi(u) = \frac{\sigma^2 u^2}{2} + i\alpha u + \int_{|y|<1} (1 - \exp(-iuy) - iuy)\nu(dy) + \int_{|y|>1} (1 - \exp(-iuy))\nu(dy),$$

où $\sigma > 0$ et α sont deux constantes et ν est une mesure sur $\mathbb{R}^*$ telle que $\int_{\mathbf{R}} \min(1, y^2)\nu(dy) < \infty$ et $\int_{|y|>1} (e^y + e^{2y})\nu(dy) < \infty$. La constante $c = \int_{\mathbf{R}} (1 - \exp(y) + y 1_{|y|\leq 1})\nu(dy)$ est choisie de telle sorte que $\mathbb{E}(S_t) = S_0 \exp(rt)$. On renvoie à [5, 1].

On considère une option de payoff ϕ sur S_t. Son prix à l'instant t est donné par : $P(t, S_t) = \exp(-r(T-t))\mathbb{E}\left(\phi(S_T)|\mathcal{F}_t\right)$. On montre que P est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial t}(t,S) + \dfrac{\sigma^2 S^2}{2}\dfrac{\partial^2 P}{\partial S^2}(t,S) + rS\dfrac{\partial P}{\partial S}(t,S) - rP(t,S) \\ + \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \left(P(t, S\exp(y)) - P(t,S) - S(\exp(y)-1)\frac{\partial P}{\partial S}(t,S) \right) \nu(dy) = 0, \\ P(T,S) = \phi(S). \end{array} \right. \tag{1}$$

On considérera les cas $\nu(dy) = k(y)dy$ avec :

- le modèle CGMY : $k(y) = \dfrac{C}{|y|^{1+Y}} \left(\exp(-G|y|)1_{y<0} + \exp(-M|y|)1_{y>0}\right)$, où $C > 0$, $0 < Y < 2$, $G > 0$ et $M > 2$,
- le modèle de Merton : $k(y) = C\exp\left(-\frac{(y-\delta)^2}{2\gamma^2}\right)$ où $C > 0$.

On proposera une méthode de différences finies et une méthode d'éléments finis pour résoudre l'équation aux dérivées partielles (1), en s'inspirant de [1] (Section 4.6) (programmation en FreeFem++ ou en Scilab). On cherchera également à résoudre ce problème par des méthodes par transformées de Fourier (cf. [2, 4], programmation en Scilab), et on comparera les résultats obtenus par les deux méthodes.

Références

[1] Y. Achdou and O. Pironneau. *Computational methods for option pricing.* Frontiers in applied mathematics. SIAM, 2005.

[2] S. Borak, K. Detlefsen, and W. Härdle. FFT based option pricing. Technical report, Humboldt-Universität, 2005.

[3] P. Carr, H. Geman, D. Madan, and M. Yor. The fine structure of asset returns : An empirical investigation. *Journal of business*, 75(2) :305–332, 2002.

[4] P. Carr and D. Madan. Option valuation using fast Fourier transform. *J. Comput. Finance*, 2 :61–73, 1998.

[5] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* Ellipses, 1997.