Calcul de Grecs.

Tony Lelièvre

On considère un put européen, dans le modèle de Black et Scholes. Sous la probabilité risque neutre, le sous-jacent vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

où r est le taux d'intérêt et σ la volatilité. Le payoff de l'option est donné par $h(S_T) = (K - S_T)_+$ et le prix de l'option est :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(h(S_T)|\mathcal{F}_t).$$

Le prix de l'option à l'instant t est donné par $P(t, S_t)$ solution de où la fonction P vérifie :

$$\begin{cases} \partial_t P + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{S,S} P + rS\partial_S P - rP = 0, & \text{pour } S \geq 0, \\ P(T,S) = (K-S)_+. \end{cases} \tag{1}$$

En pratique, il est important de calculer avec précision les dérivées de P. Par exemple, la dérivée par rapport à S (appelée delta) joue un rôle important dans la couverture. Voici une liste des grecs qui sont utilisés en pratique : le delta $\delta = \partial_S P$, le theta $\Theta = \partial_t P$, le vega $\kappa = \partial_\sigma P$, le rho $\rho = \partial_r P$, le eta $\eta = \partial_K P$ et le gamma $\gamma = \partial_{S,S} P$.

Une méthode pour calculer les grecs consiste à dériver directement l'EDP (1) pour obtenir une nouvelle EDP vérifiée par la quantité que l'on veut évaluer. On peut ensuite discrétiser cette EDP.

Une autre méthode consiste à utiliser une méthode de différentiation automatique comme expliqué dans le chapitre 7 de [1].

L'objectif de ce projet est de comprendre la méthode de différentiation automatique et de la programmer en C++. On pourra utiliser les librairies proposées dans [1]. On comparera les résultats obtenus par différentiation automatique et par discrétisation de la dérivée de (1). On pourra utiliser ces méthodes pour des options sur deux sous-jacents.

Références

[1] Y. Achdou and O. Pironneau. *Computational methods for option pricing.* Frontiers in applied mathematics. SIAM, 2005.