

Pricing d'options asiatiques.

Tony Lelièvre

On considère des options sur moyenne, dans le modèle de Black et Scholes. Sous la probabilité risque neutre, le sous-jacent vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

où r est le taux d'intérêt et σ la volatilité. On note $A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_u du$ la moyenne du sous-jacent. Le payoff de l'option est donné par $g(S_T, A_T)$ et le prix de l'option est donc :

$$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}(g(S_T, A_T) | \mathcal{F}_t).$$

On peut vérifier que le prix à l'instant t est donné par une fonction $V(t, S_t, A_t)$ solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{t}(S - A) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0, \\ V(T, S, A) = g(S, A). \end{cases} \quad (1)$$

Si on considère le cas $g(S, A) = (A - K)_+$, il est possible de se ramener à une équation en une dimension d'espace :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2 \xi^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \left(\frac{1}{T} + r\xi \right) \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \\ f(T, \xi) = \phi(\xi). \end{cases} \quad (2)$$

avec $\phi(\xi) = \xi_-$ et $V(t, S, A) = Sf\left(t, \frac{K-tA/T}{S}\right)$.

L'objectif de ce projet est de comparer les résultats obtenus par la discrétisation de (1) et de (2). Pour la discrétisation du problème en deux dimensions, on s'appuiera sur la Section 3.7 de [1] et on utilisera FreeFem. Pour la discrétisation du problème en une dimension d'espace, on utilisera une méthode des caractéristiques, comme c'est expliqué dans [2], et une discrétisation par différences finies sous Scilab. On pourra également considérer le cas où $A_t = \int_0^t \exp(-(t-u)) S_u du$.

Références

- [1] Y. Achdou and O. Pironneau. *Computational methods for option pricing*. Frontiers in applied mathematics. SIAM, 2005.
- [2] F. Dubois and T. Lelièvre. Efficient pricing of Asian options by the PDE approach. *Journal of Computational Finance*, 8(2) :55–64, 2005.