Pricing d'options américano-asiatiques

Olivier Bokanowski

On considère un modèle d'option américano-asiatique portant sur un actif S_t et sur une valeur moyenne $A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_\tau d\tau$. On considère que le prix de l'option à écheance est $(A(T) - S(T))_+$ (cas du call-strike flottant). Le détenteur du contrat à le droit d'exercer à tout moment pour un payoff de valeur

$$\varphi(S_t, A_t) = (A_t - S_t)_+$$

On montre que la valeur $V = V(t, S, A)$ d'une telle option doit satisfaire à l'E.D.P suivante:

$$\min(-\partial_t V - \frac{\sigma^2}{2}S^2\partial_{SS}V - rS\partial_S V - \frac{1}{t}(S-A)\partial_A V + rV,\ V - g) = 0, \quad S, A \geq 0, \quad t \in (0, T)$$

avec la condition terminale $V(T, S, A) = \varphi(S, A)$.

1. On fait les changement de variables $x := -\frac{A}{S}$ et $t \to T - t$, et on cherche une solution particulière sous la forme $V(t, S, A) = Sf(T - t, x)$. Montrer que f doit vérifier l'EDP suivante:

$$\min\left(\partial_t f - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} f + (\frac{1+x}{T-t} + rx)\partial_x f,\ f - g(x)\right) = 0, \quad x \leq 0, t \in (0, T) \tag{1a}$$

$$f(0, x) = g(x) := (-1 - x)_+, \tag{1b}$$

avec $g(x) := (-1 - x)_+ = max(-1 - x, 0)$. La valeur cherchée est alors $V(0, S_0, S_0) = S_0 f(T, x = -1)$.

Proposer un schéma aux différences finies explicite, puis implicite (Euler implicite et Crank Nicolson), et tester les versions décentrées et centrées. Pour les schéma implicites on considerera d'abord une méthode de splitting, puis on pourra éventuellement comparer avec une méthode de type Newton. On pourra travailler sur un intervalle $[X_{\min}, X_{\max}]$ avec $X_{\min} \leq -1$ et $X_{\max} = 0$ et des conditions aux limites apropriées. [1] Exemple de données numériques: $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $K = 100$, $S_0 = 100$, $T = 1$.

2. Proposer une discrétisation directe par éléments finis avec FreeFem et comparer les résultats obtenus.

3. Traiter le cas du call strike fixe ($g(S, A) = (A(T) - K))+$) par une méthode d'éléments finis. (On pourra dans ce cas comparer avec [1]). Exemple de données numériques: $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $K = 100$, $S_0 = 100$, $T = 0.25$. Peut-on aussi appliquer l'approche vue en 1. ?

[1] Afin de trouver de bonnes conditions aux limites quand $x \to -\infty$, on pourra commencer par déterminer une solution analytique de la forme $k(t, x) = a(t)x + b(t)$ dans le cas où la condition initiale est $k(0, x) = -1 - x$ et l'équation $\partial_t k - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} k + (\frac{1+x}{T-t} + rx)\partial_x k = 0$. On pourra alors prendre la condition limite à gauche $f(t, X_{min}) = k(t, X_{min})$ en $x = X_{min}0$.

References

[1] A. Bermúdez, M. R. Nogueiras, C. Vázquez, Numerical solution of variational inequalities for pricing Asian options by higher order LagrangeGalerkin methods. *Applied Numerical Mathematics* 56 (2006) 12561270.

[2] Rogers, L. C. G. and Shi, Z., *The value of an Asian option.* J. Appl. Probab. 32 (1995), no. 4, 1077–1088.