Pricing d'options sur maximum.

Tony Lelièvre

On considère des options sur maximum, dans le modèle de Black et Scholes. Sous la probabilité risque neutre, le sous-jacent vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

où r est le taux d'intérêt et σ la volatilité. On note $M_t = \max_{0 \leq r \leq t} S_r$ la valeur maximum du sous-jacent sur l'intervalle $[0, t]$. Le payoff de l'option est donné par $g(S_T, M_T)$ et le prix de l'option est donc :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(g(S_T, M_T)|\mathcal{F}_t).$$

On peut vérifier que le prix à l'instant t est donné par une fonction $P(t, S_t, M_t)$ solution de :

$$\begin{cases} \partial_t P + \dfrac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_{S,S} P + rS\partial_S P - rP = 0, & \text{pour } 0 \leq S \leq M, \\ P(T, S, M) = g(S, M), \\ \dfrac{\partial P}{\partial M}(t, S, S) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Si on considère le cas $g(S, M) = M\phi(S/M)$, il est possible de se ramener à une équation en une dimension d'espace :

$$\begin{cases} \partial_t W + \frac{\sigma^2}{2} \xi^2 \partial_{\xi,\xi} W + r\xi \partial_\xi W - rW = 0, & \text{pour } 0 \leq \xi \leq 1, \\ W(T, \xi) = \phi(\xi), \\ \dfrac{\partial W}{\partial \xi}(t, 1) = W(t, 1). \end{cases} \tag{2}$$

avec $P(t, S, M) = MW(t, S/M)$.

L'objectif de ce projet est de comparer les résultats obtenus par la discrétisation de (1) et de (2). Pour la discrétisation du problème en deux dimensions, on utilisera FreeFem. On pourra également comparer à une méthode de type différences finies, telles que celle proposée dans la Section 5 de [1]. Enfin, il existe également des formules fermées pour certains payoffs g (cf. [2]).

Question subsidiaire : Dans le cas de l'option américaine, que devient le problème (1) ? Ecrire un algorithme qui permet de résoudre ce problème.

Références

[1] R. Carbone. Binomial approximation of brownian motion and its maximum. *Statistics and Probability Letters*, 69 :271–285, 2004.

[2] P. Wilmott, J. Dewynne, and S. Howison. *Option pricing : mathematical models and computation.* Oxford financial press, 1993.