Optimisation de portefeuille

Olivier Bokanowski

On considère un portefeuille dont la valeur X_t varie suivant

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\alpha_t \mu + (1-\alpha_t) r)\, dt + \alpha_t \sigma dW_t,$$

où α_t (resp. $1-\alpha_t$) correspond à la part investie dans un l'actif risqué (resp. sans risque). On suppose que $\alpha_t \in \mathcal{A} := [\alpha_0, \alpha_1]$ avec $0 \le \alpha_0 < \alpha_1 \le 1$. On cherche α_t afin d'optimiser l'espérance de la valeur terminale $\mathbb{E}[\varphi(X_T)]$, et la valeur optimale correspondante du portefeuille:

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in L^\infty([t,T],\mathcal{A})} \mathbb{E}[u(X_T)|\ X_t = x], \quad 0 \le t \le T,$$

φ étant une fonction donnée, appelée fonction utilité. On montre que v est solution (au sens de viscosité) de l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$-\partial_t v + \inf_{a \in \mathcal{A}} \left[-(a\mu + (1-a)r) x \partial_x v - \frac{1}{2} a^2 x^2 \sigma^2 \partial_{xx} v \right] = 0, \quad t \in (0,T), x > 0, \tag{1}$$

avec une condition terminale $v(T,x) = u(x)$, $x > 0$.

1. Proposer un schéma aux differences finies explicite sur un domaine tronqué $[0, \bar{X}]$.[1] Commencer par valider le code dans le cas particulier où $u(x) = x^p$ avec $p \in (0,1)$.

A.N. On considère la fonction d'utilité $u(x) = x$ pour $x \in (0,1)$ et $u(x) = x^{\frac{1}{2}}$ si $x \ge 1$. $r = 0.05$, $\mu = 0.06$, $\sigma = 0.2$, $\mathcal{A} = [0.2, 0.9]$, $T = 1$ On pourra aussi faire varier la contrainte $\mathcal{A}$ et étuder l'impact sur le prix u.

2. Ecrire un schéma implicite (Euler implicite, puis Crank-Nicolson), le résoudre par une méthode de type Newton [4].

References

[1] H. Pham, Notes de cours (2003), *Contrôle Optimal Stochastique et applications en Finance*, cf. `www.proba.jussieu.fr/pageperso/pham`.

[2] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications* (3rd edition), Springer Verlag, 1992.

[3] W.H. Fleming and H.M. Soner, 1993, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions.*

[4] O. Bokanowski, S. Maroso, and H. Zidani, Some convergence results for Howard's algorithm. SIAM J. Numer. Anal. Volume 47, Issue 4, pp. 3001-3026 (2009).

[1] Pour la condition limite en $x = \bar{X}$ on pourra prendre une condition mixte Neumann/Dirichlet approchant un comportement de la forme $v(t,x) = const.x^p$ (par exemple $v_x = p/xv$, en $x = \bar{X}$). Pour valider le code on pourra commencer par considérer le problème particulier où $u(x) = x^p$, $p \in (0,1)$, $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, en cherchant une solution exacte sous la forme $v(t,x) = \varphi(t) x^p$. On doit trouver une stratégie optimale constante $\alpha_t = \alpha^* = const$ dans ce cas.