Pricing d'option avec contraintes Gamma

Olivier Bokanowski

On considère un portefeuille constitué d'un actif sans risque S^0 et d'un actif risqué $S(u) = S_{t,s}(u)$, évoluant suivant $dS^0(u) = S^0(u)rdu$ et

$$dS(u) = S(u)(\mu du + \sigma(u, S(u))dW(u))$$

Notons $Y(u)$ la part d'actif risqué à l'instant u. Dans le modèle de Black et Scholes, la stratégie de hedging classique consiste à prendre $Y(u) = \frac{\partial v}{\partial s}(u, S(u))$. En pratique les contraintes du marché font que cette stratégie optimale n'est pas toujours possible, et on examine ici un modèle où l'on impose une contrainte sur les variations de Y. Plus précisement, on se donne une constante $\Gamma > 0$ et on considère la contrainte

$$s\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \leq \Gamma$$

(On dit alors que v est Γ-concave).

En présence d'une telle contrainte, on montre [1] que la valeur v d'une option vanille sur l'actif $S(u)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\min\Big(-\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(t,s)s^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - rs\frac{\partial v}{\partial s} + rv,\ \Gamma - s\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\Big) = 0 \tag{1}$$

avec la condition terminale

$$v(T, s) = \hat{g}(s). \tag{2}$$

La fonction $\hat{g}$ est elle même définie comme la plus petite fonction Γ-concave majorant $g(s)$, et on montre que cette fonction est solution de l'équation

$$\min(\hat{g}(s) - g(s), \Gamma - s\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial s^2}) = 0, \quad s > 0.$$

On demande de programmer une discrétisation de type différences finies pour (1)-(2). Pour un schema implicite, on pourra adapter la méthode de Newton pour les options américaines [2] On commencera en particulier par proposer un algorithme de calcul de $\hat{g}$. Dans le cas de $g(s) = (K - s)_+$, on pourra comparer avec la solution analytique $\hat{g}(s)$ donnée dans [1, Sec. 8]. On pourra aussi consulter [3].

Données numériques : $K = 100$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.1$, $T = 0.1$, $\Gamma = 1$, et avec les payoff 1^o : $g(s) = (K - s)_+$, puis 2^o : $g(s) = (K - 2|s - K|)_+$. Comparer ces résultats avec le prix d'une option de payoff $\hat{g}$ évoluant sans contraintes (i.e. suivant le modèle de Black et Scholes).

Références

[1] H. M. Soner, N. Touzi. *Superreplication under gamma constraints*, SIAM J. Control Optim., Vol. 39 (1) : 73–96, 2000.

[2] Bokanowski, O. and Maroso, S. and Zidani, H., Super linear convergence results for the Howard algorithm. SIAM J. Numer. Anal. Volume 47, Issue 4, pp. 3001-3026 (2009)

[3] Examun du cours "Méthodes déterministes pour les EDP en finance, Février 2008.