Un algorithme glouton pour résoudre des problèmes de grandes dimensions.

Tony Lelièvre

Un algorithme a récemment été proposé par A. Ammar et al. [1] pour résoudre des équations aux dérivées partielles en grandes dimensions. Il s'agit de calculer itérativement un développement de la solution comme une somme de produits tensoriels. L'algorithme peut être vu comme une généralisation de la décomposition en valeurs singulières pour les matrices.

Le principe de l'algorithme est le suivant. En supposant que le problème à résoudre admet une formulation du type :

$$u = \arg\min_{v \in H} J(v)$$

où H est un espace fonctionnel de Hilbert (disons de fonctions dépendant de quatre variables) et J une fonctionnelle α-convexe, la méthode consiste à écrire la solution sous la forme

$$u(S_1, S_2, S_3, S_4) = \sum_{k \geq 1} r_1^k(S_1) r_2^k(S_2) r_3^k(S_3) r_4^k(S_4)$$

où les produits tensoriels $r_1^k \otimes r_2^k \otimes r_3^k \otimes r_4^k$ sont calculés successivement en résolvant les problèmes de minimisation :

$$r_1^n \otimes r_2^n \otimes r_3^n \otimes r_4^n = \arg \min_{r_1, r_2, r_3, r_4} J\left(\sum_{k=1}^{n-1} r_1^k \otimes r_2^k \otimes r_3^k \otimes r_4^k + r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes r_4 \right).$$

En s'appuyant sur l'article [2], l'objectif de ce projet est d'appliquer cette méthode pour le pricing d'une option sur panier en dimension 4. Les étapes sont les suivantes :

1. Décomposition d'un *payoff* de type *put* :

$$\varphi(S_1, S_2, S_3, S_4) = \left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i S_i - K \right)_+$$

comme somme de produit tensoriel (en utilisant pour J la norme L^2).

2. Utilisation de cette décomposition pour calculer le prix d'un *put* dans le modèle de Black-Scholes par une méthode intégrale.

3. Extension de la méthode pour la résolution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq 4} \Sigma_{i,j} S_i S_j \frac{\partial^2 P}{\partial S_i \partial S_j} = 0, \\ P(T, S_1, \ldots, S_4) = \varphi(S_1, \ldots S_4), \end{cases}$$

où Σ est une matrice de volatilité donnée (le taux d'intérêt est supposé nul). On utilisera une discrétisation en temps de type Euler implicite.

Références

[1] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 139 :153–176, 2006.

[2] C. Le Bris, T. Lelièvre, and Y. Maday. Results and questions on a nonlinear approximation approach for solving high-dimensional partial differential equations. *Constructive Approximation*, 30(3) :621–651, 2009.