Pricing d'options avec volatilité stochastique.

Tony Lelièvre

17 novembre 2008

On considère un sous-jacent qui vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma_t dW_t).$$

On suppose de plus que la volatilité σ_t est fonction d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$\begin{aligned} &\sigma_t = f(Y_t), \\ &dY_t = \alpha(m - Y_t)\, dt + \beta d\hat{B}_t, \end{aligned}$$

où $\hat{B}_t$ est un autre mouvement Brownien, éventuellement corrélé à W_t :

$$\hat{B}_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2} B_t$$

où B_t est un mouvement Brownien indépendant de W_t et $\rho \in [-1, 1]$ est le coefficient de corrélation.

On montre alors que le prix d'une option de payoff $\phi(S_T)$ s'écrit $P(t, S_t, Y_t)$, où P est solution de l'équation aux dérivées partielles, posée pour $t \in [0, T]$, $S \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{1}{2} f^2(y) S^2 \dfrac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \rho\beta S f(y) \dfrac{\partial^2 P}{\partial S \partial y} + \dfrac{1}{2}\beta^2 \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ \qquad + r(t)\left(S\dfrac{\partial P}{\partial S} - P \right) + (\alpha(m-y) - \beta\Lambda(t,S,y)) \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0, \\ P(T, S, y) = \phi(S). \end{array} \right.$$

On renvoie par exemple à la Section 2.7 de [1] pour la dérivation de cette équation. On pourra également consulter [2] pour plus de détails sur les modèles et [4] pour des résultats numériques.

Proposer et programmer une discrétisation par différences finies, et une discrétisation par éléments finis de ce problème. Pour la discrétisation par différences finies, on pourra consulter [5] pour approcher le terme de dérivées croisées. Comparer les résultats numériques obtenus. Pour un call da maturité donnée, tracer la volatilité implicite en fonction de la valeur du strike. Qu'observez-vous ?

Facultatif : Mêmes questions pour le modèle de Heston (cf. [3, 4]).

Références

[1] Y. Achdou and O. Pironneau. *Computational methods for option pricing.* Frontiers in applied mathematics. SIAM, 2005.

[2] J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, and R. Sircar. *Derivatives in financial markets with stochastic volatility.* Cambridge University Press, 2000.

[3] S. Heston. A closed form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options. *Review with Financial Studies*, 6 :327–343, 1993.

[4] N. Hilber, A.-M. Matache, and C. Schwab. Sparse wavelet methods for option pricing under stochastic volatility. *Journal of Computational Finance*, 8(4), 2005.

[5] A.R. Mitchell and D.F. Griffiths. *The finite difference method in partial differential equations*. Wiley, 1980.