Examen du cours MOPSI

12 février 2010, 08h30-12h00.

Les notes de cours (notes manuscrites et polycopiés) sont autorisées.

Important : L'examen comporte deux exercices et deux problèmes indépendants. Nous vous demandons de rédiger les réponses sur deux copies distinctes :
– sur la copie "Analyse numérique", rédiger les réponses à l'exercice 1 et au problème 1.
– sur la copie "Probabilités", rédiger les réponses à l'exercice 2 et au problème 2.

Exercice I : Comportement en temps long et équation différentielle ordinaire.

On considère l'équation (adimensionnée) du pendule amorti :

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -x - \lambda v, \end{cases} \tag{1}$$

où $x \in \mathbb{R}$ désigne l'angle que fait le pendule par rapport à la verticale, $v \in \mathbb{R}$ est sa vitesse angulaire et $\lambda > 0$ désigne un coefficient de frottement.

1 Rappeler les positions d'équilibre de ce système. Ces solutions stationnaires sont-elles stables ou instables ?

2 En calculant une solution explicite, montrer que le système converge en temps long vers la solution stationnaire $(x, v) = (0, 0)$, avec une vitesse exponentielle dont on précisera le taux en fonction de λ. *On dit qu'une fonction g dépendant du temps t converge vers 0 avec une vitesse exponentielle de taux r si il existe $C > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$, $|g(t)| \leq C \exp(-rt)$.*

On s'intéresse dans la suite à une méthode basée sur une fonction de Lyapunov pour étudier la convergence en temps long de (1). L'intérêt d'une telle approche est qu'elle peut se généraliser à des cas où l'on ne dispose pas de solution analytique.

3 Soit $H(x, v) = \frac{1}{2}(x^2+v^2)$. Donner une interprétation physique de H, et calculer $\frac{d}{dt}H(x(t), v(t))$, où $(x(t), v(t))$ désigne une solution de (1). Peut-on utiliser un Lemme de Gronwall pour démontrer la convergence exponentielle de $H(x(t), v(t))$ vers 0 ?

4 On introduit $H_\varepsilon(x, v) = \frac{1}{2}(x^2 + v^2) + \varepsilon xv$, ou $\varepsilon \in (0, 1)$ est un paramètre à déterminer. Montrer que, pour tout (x, v),

$$\frac{1-\varepsilon}{2}(x^2 + v^2) \leq H_\varepsilon(x, v) \leq \frac{1+\varepsilon}{2}(x^2 + v^2).$$

5 Calculer $\frac{d}{dt}H_\varepsilon(x(t), v(t))$ et montrer que

$$\frac{d}{dt}H_\varepsilon(x(t), v(t)) \leq -\frac{\lambda}{2}\left[1 - \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon}{\lambda} - 1\right)^2 + \varepsilon^2}\right]\left(x(t)^2 + v(t)^2\right).$$

On pourra écrire $xv \leq \eta x^2 + \frac{1}{4\eta} v^2$, pour $\eta > 0$, puis choisir la valeur de η.

6 En déduire que pour ε assez petit,

$$\frac{d}{dt} H_\varepsilon(x(t), v(t)) \leq -f(\lambda, \varepsilon) H_\varepsilon(x(t), v(t))$$

où $f(\lambda, \varepsilon) = \lambda \dfrac{1 - \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon}{\lambda} - 1\right)^2 + \varepsilon^2}}{1 + \varepsilon}$ est une fonction dont on vérifiera qu'elle est positive pour ε assez petit.

7 On trace sur la Figure 1 la fonction $F : \lambda \mapsto \max_\varepsilon f(\lambda, \varepsilon)$ et la fonction $G : \lambda \mapsto \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}\, 1_{\lambda \geq 2}$. Commenter ces résultats.

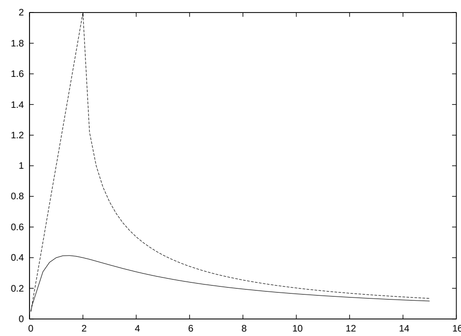

FIG. 1 – En trait plein, la fonction F et en pointillés la fonction G, en fonction de λ.

Problème I : Equation de Poisson : interprétation probabiliste et estimateur *a posteriori*.

Les deux parties du problèmes peuvent être traitées séparément.

A Interprétation probabiliste d'une équation de Poisson.

On considère la solution $p : \mathbb{R}^d \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) \to \mathbb{R}$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta p = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^d \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}), \\ p = 0 \text{ sur } \partial A, \\ p = 1 \text{ sur } \partial B, \end{cases} \tag{2}$$

où A et B sont deux ouverts réguliers de $\mathbb{R}^d$ disjoints. On suppose que $\mathbb{R}^d \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$ est un ouvert borné régulier.

Pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$ fixé, on introduit les temps d'arrêts :

$T_A(x) = \inf\{t > 0, x + W_t \in A\}$, $T_B(x) = \inf\{t > 0, x + W_t \in B\}$ et $\tau(x) = \min(T_A(x), T_B(x))$, où W_t désigne un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$.

A.1 Rappeler pourquoi le problème (2) est bien posé. Montrer que la solution p est à valeurs dans $[0,1]$.

A.2 Vérifier que $\tau(x) = \inf\{t \geq 0, x + W_t \notin \mathbb{R}^d \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})\}$. On rappelle la formule d'Itô multidimensionnelle : pour une fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ régulière, on a :

$$\varphi(x + W_t) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta\varphi(x + W_s) ds + \int_0^t \nabla\varphi(x + W_s) \cdot dW_s.$$

En admettant que p est une fonction régulière sur $\mathbb{R}^d \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$ et en particulier que ∇p est une fonction bornée, montrer que pour tout entier n non nul,

$$\mathbb{E}\Big[p\big(x + W_{\min(\tau(x),n)}\big)\Big] = p(x).$$

En admettant que A et B sont tels que $\tau(x) < \infty$ p.s., en déduire que

$$\mathbb{E}\Big[p\big(x + W_{\tau(x)}\big)\Big] = p(x).$$

A.3 En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que $p(x) = \mathbb{P}(T_B(x) < T_A(x))$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$,

$$p(x) = \mathbb{P}\left(x + W_t \text{ touche } B \text{ avant } A\right).$$

B Estimateurs *a posteriori* pour une équation de Poisson.

On considère la solution $u : \Omega \to \mathbb{R}$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ sur } \Omega, \\ \quad u = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où Ω est un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de $L^2(\Omega)$. On introduit la solution u_h du problème obtenue par une méthode d'éléments finis P^k $(k \geq 1)$, sur un maillage de pas de discrétisation h. On note $V_h \subset H^1_0(\Omega)$ l'espace d'éléments finis : $u_h \in V_h$ est tel que, pour tout $v_h \in V_h$

$$a(u_h, v_h) = l(v_h)$$

où $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ et $l(v) = \int_\Omega f v$.

B.1 Rappeler pourquoi il existe bien une unique solution u_h à la formulation variationnelle ci-dessus.

Dans la suite, on cherche à estimer *localement* l'erreur introduite par la discrétisation par éléments finis *en utilisant seulement la solution approchée u_h*. On a pour cela besoin d'introduire quelques notations supplémentaires.

On note $\mathcal{T}_h = \{K_i, i \in \{1, \dots, I\}\}$ le maillage du domaine Ω par des triangles (K_i) (associé à l'espace d'éléments finis V_h). On introduit l'estimateur d'erreur local associé à l'élément $K \in \mathcal{T}_h$:

$$\eta_K = \left(h_K^2 \|\Delta u_h + f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{S \in \partial K \setminus \partial\Omega} h_S \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(S)}^2 \right)^{1/2},$$

où $\sum_{S \in \partial K \setminus \partial\Omega}$ désigne une somme sur les côtés S de K qui ne sont pas inclus dans le bord du domaine, h_K désigne le diamètre de l'élément K et h_S la longueur de l'arête S. De plus,

$$\left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] = \frac{\partial u_h|_K}{\partial n} - \frac{\partial u_h|_{K'}}{\partial n}$$

désigne le saut de la dérivée normale de u_h sur l'arête $S = \partial K \cap \partial K'$ commune aux éléments K et K', la normale n étant par convention supposée sortante à l'élément K. Noter que le choix de l'orientation de n n'influe pas sur la valeur de η_K.

B.2 Montrer que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(-\int_K \Delta u_h v + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] v \right).$$

En déduire que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $v_h \in V_h$,

$$a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (f + \Delta u_h)(v - v_h) - \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] (v - v_h) \right). \quad (4)$$

On admet dans la suite qu'il existe un opérateur de projection local $R_h : V \mapsto V_h$ vérifiant : il existe $C > 0$ tel que pour tout élément K, pour toute arête S et pour tout $v \in V_h$,

$$\|v - R_h v\|_{L^2(K)} \leq C h_K \|v\|_{H^1(\Delta K)}$$

$$\|v - R_h v\|_{L^2(S)} \leq C h_S^{1/2} \|v\|_{H^1(\Delta S)}$$

où ΔK désigne l'union des éléments du maillage partageant au moins un noeud avec l'élément K, et ΔS désigne l'union des éléments du maillage partageant au moins un noeud avec l'arête S. Noter que si $S \subset \partial K$ est une arête de K, alors $\Delta S \subset \Delta K$.

B.3 En choisissant $v_h = R_h(v)$ dans (4), montrer que

$$a(u - u_h, v) \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2},$$

où C est une constante indépendante de f, u, u_h, h_K et h_S. En déduire que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}. \quad (5)$$

On appelle une telle estimation d'erreur une estimation *a posteriori*, car elle ne fait intervenir que des quantités calculables numériquement (le vérifier).

B.4 On admet que l'on peut montrer une inégalité inverse du type : η_K est majoré par l'erreur $\|u - u_h\|_{H^1(\Delta K)}$. L'estimateur η_K est donc un bon estimateur de l'erreur locale. Expliquer l'intérêt de l'estimation a posteriori (5) d'un point de vue pratique.

Exercice II : étude de la probabilité de panne d'une machine.

On considère une machine qui sert à la production de pièces. Elle peut être soit à l'arrêt (état noté 1), soit en marche (état noté 2), soit en panne (état noté 3).

- Lorsqu'elle est à l'arrêt, la machine a une probabilité 1/5 de rester à l'arrêt et une probabilité 4/5 d'être en marche le jour suivant.
- Lorsqu'elle est en marche, la machine a une probabilité 7/10 de rester en marche et une probabilité 1/5 d'être à l'arrêt le jour suivant.
- Lorsqu'elle est en panne, la machine a une probabilité 1/2 de rester en panne et une probabilité 1/10 d'être à l'arrêt le jour suivant.

On suppose que la machine est initialement à l'arrêt (i.e. $X_0 = 1$), et on note X_n l'état de la machine après n jours.

1 Donner la matrice de transition $(P(i,j))_{1\leq i,j\leq 3}$ de la chaîne de Markov $(X_n, n \in \mathbb{N})$. Cette chaîne est elle irréductible ?

2 Trouver (si elle existe) une probabilité invariante pour cette chaîne. Donner le comportement asymptotique lorsque $n \to +\infty$ de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i=3\}}$, la proportion de temps passé en panne.

3 Montrer que cette chaîne de Markov satisfait la condition de Doeblin (cf. polycopié). Donner le comportement asymptotique lorsque $n \to +\infty$ de $\mathbb{P}(X_n = 3)$, la probabilité d'être en panne après n jours.

Problème II : étude de la loi du temps d'atteinte pour un mouvement brownien avec dérive.

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un mouvement brownien (standard réel) $(W_t, t \geq 0)$. On appelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par ce mouvement brownien. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$\tau_a^\lambda = \inf\{t \geq 0, W_t + \lambda t = a\} \text{ (convention } \inf \emptyset = +\infty).$$

Le but de cet exercice est de déterminer la loi de τ_a^λ à travers sa transformée de Laplace $\mathbb{E}[\exp(-y\tau_a^\lambda)]$, $y > 0$. Par convention, $\exp(-y\tau_a^\lambda) = 0$ sur $\{\tau_a^\lambda = +\infty\}$.

On commence par supposer $\underline{a > 0}$ et on considère $T \geq 0$.

1 Montrer que τ_a^λ est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt, puis que $\tau_a^\lambda \wedge T$ est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable.

2 Pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, donner la fonction caractéristique du vecteur $(W_{t_1} +$

$\mu t_1, \ldots, W_{t_n} + \mu t_n)$, $\Phi(u) = \mathbb{E}[\exp(\sum_{l=1}^n iu_l(W_{t_l} + \mu t_l))]$ pour $u \in \mathbb{R}^n$. **Nous admettrons que cette formule s'étend pour $u \in \mathbb{C}^n$, ce qui s'obtient en utilisant la théorie des fonctions analytiques.**

3 Montrer que $\tau_a^0 \wedge T$ et $W_{\tau_a^0 \wedge T}$ sont deux variables aléatoires $\mathcal{F}_{\tau_a^0 \wedge T}$-mesurables (on rappelle que $\mathcal{F}_{\tau_a^0 \wedge T} = \{A \subset \Omega \text{ t.q. } \forall t \geq 0, A \cap \{\tau_a^0 \wedge T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$).

4 Calculer la valeur de $\mathbb{E}[\exp(\lambda(W_T - W_{\tau_a^0 \wedge T}) - (\lambda^2/2) \times (T - \tau_a^0 \wedge T))|\mathcal{F}_{\tau_a^0 \wedge T}]$.

On se fixe un horizon $T > 0$ et on définit sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ une nouvelle mesure de probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$:

$$\forall A \in \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[\exp(\lambda W_T - \lambda^2 T/2)\mathbf{1}_A].$$

On a bien $\tilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$, et pour toute variable aléatoire réelle X $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $\exp(\lambda W_T - \lambda^2 T/2)X \in L^1(\Omega)$,

$$\tilde{\mathbb{E}}(X) = \mathbb{E}[\exp(\lambda W_T - \lambda^2 T/2)X].$$

5 Vérifier que, pour $y > 0$, $\tilde{\mathbb{E}}(\exp(-y(\tau_a^0 \wedge T)))$ est bien définie. Montrer que $\tilde{\mathbb{E}}[\exp(-y(\tau_a^0 \wedge T))] = \mathbb{E}[\exp(\lambda W_{\tau_a^0 \wedge T} - (y + \lambda^2/2) \times (\tau_a^0 \wedge T))]$. Calculer rigoureusement la limite de $\mathbb{E}[\exp(\lambda W_{\tau_a^0 \wedge T} - (y + \lambda^2/2) \times (\tau_a^0 \wedge T))]$ lorsque $T \to +\infty$ et donner une formule explicite pour la limite.

6 Calculer pour $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq T$ la fonction caractéristique de $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ sous $\tilde{\mathbb{P}}$:

$$u \in \mathbb{R}^n, \tilde{\Phi}(u) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda W_T - \lambda^2 T/2\right) \exp\left(\sum_{l=1}^n iu_l W_{t_l}\right)\right],$$

puis déterminer la loi de $(W_t, t \in [0, T])$ sous $\tilde{\mathbb{P}}$. On pose pour $t \geq 0$, $\tilde{W}_t = W_t - \lambda t$. En déduire que $(\tilde{W}_t, t \in [0, T])$ est un mouvement brownien sous $\tilde{\mathbb{P}}$.

7 Exprimer τ_a^0 en fonction de $(\tilde{W}_t, t \geq 0)$, et en déduire que :

$$y > 0, \ \tilde{\mathbb{E}}[\exp(-y(\tau_a^0 \wedge T))] = \mathbb{E}[\exp(-y(\tau_a^\lambda \wedge T))].$$

8 A l'aide des questions 5 et 7, donner la transformée de Laplace $\mathbb{E}[\exp(-y\tau_a^\lambda)]$, $y > 0$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\tau_a^\lambda < +\infty)$ en fonction de a et λ.

9 Donner sans faire de calculs supplémentaires la transformée de Laplace $\mathbb{E}[\exp(-y\tau_a^\lambda)]$ lorsque $a < 0$.