

**Analyse numérique d'une méthode ALE**  
**pour le suivi d'interface :**  
**Application à l'électrolyse de l'aluminium.**

*Jean-Frédéric Gerbeau*, projet BANG, INRIA

*Claude Le Bris*, CERMICS, Ecole Nationale des Ponts & Chaussées

*Tony Lelièvre*, CERMICS et CRM, Université de Montréal

*Nous remercions la société Alcan pour son soutien financier.*

# Plan

## I Motivations industrielles

## II Discrétisation des équations de la magnétohydrodynamique (MHD)

- Le cas d'un seul fluide
- Le cas de deux fluides
  - ★ formulation Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE)
  - ★ propriétés de conservation et de stabilité
  - ★ tension de surface

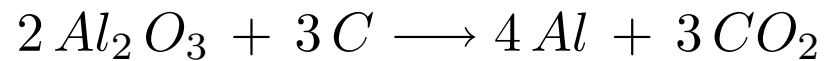
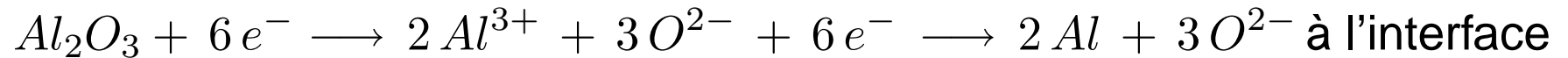
## III Simulations numériques

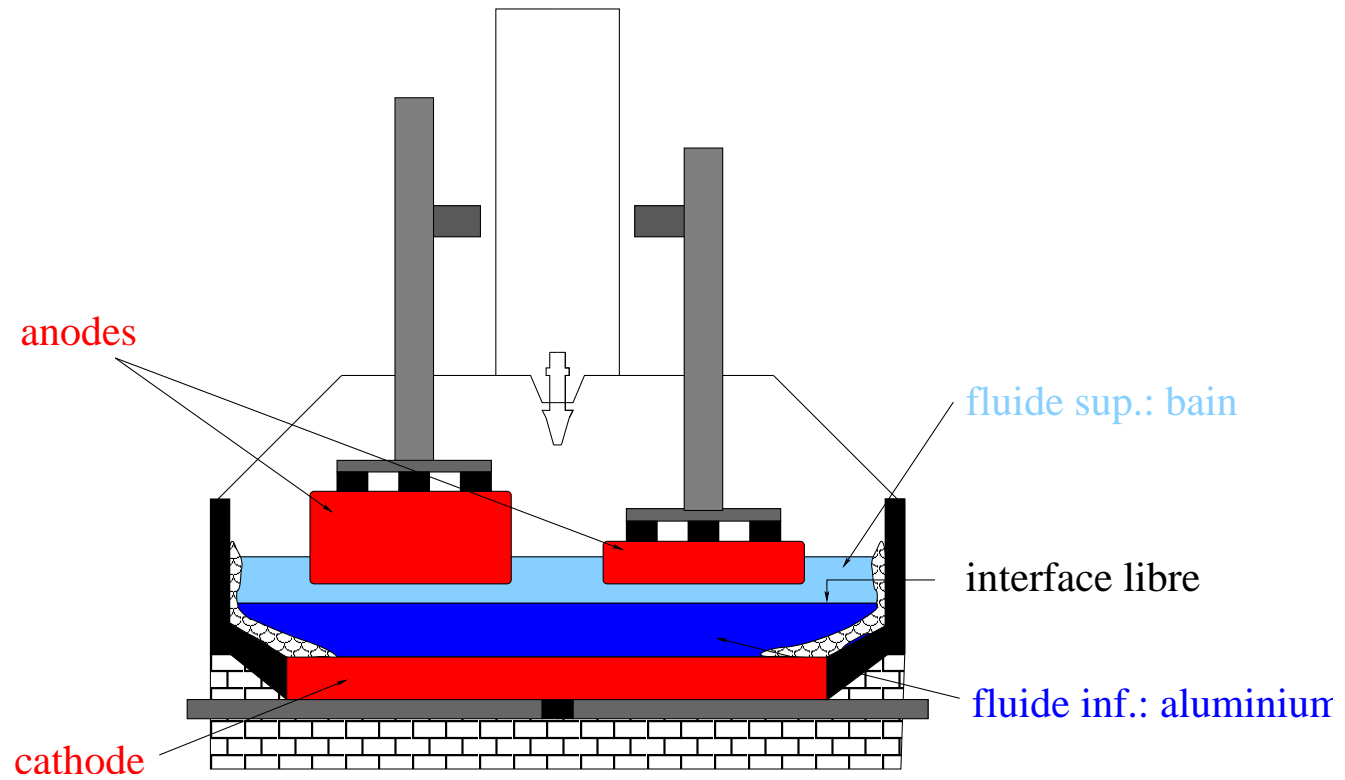
- Un cas-test académique
- L'état stationnaire de la cuve
- Le roulement de la nappe de métal

# 1. Electrolyse de l'aluminium

## Principe :

- Deux fluides sont traversés par un courant électrique
- Réaction d'électrolyse à l'interface entre les fluides





## Grandeurs physiques typiques :

Courant électrique :	300 kA
Champ magnétique :	0.01 teslas
Vitesse dans les fluides :	0.2 m/s
Température :	1000 °C

## Quelques nombres adimensionnels :

Reynolds :	$10^5$
Reynolds magnétique :	de $10^{-5}$ à 0.1
Paramètre de couplage (Force de Lorentz) :	1

Les cuves expérimentales coûtent chères et les mesures sont parfois difficiles à réaliser (vitesse des fluides, position de l'interface,...), d'où l'intérêt des simulations numériques de la cuve.

## Enjeu industriel :

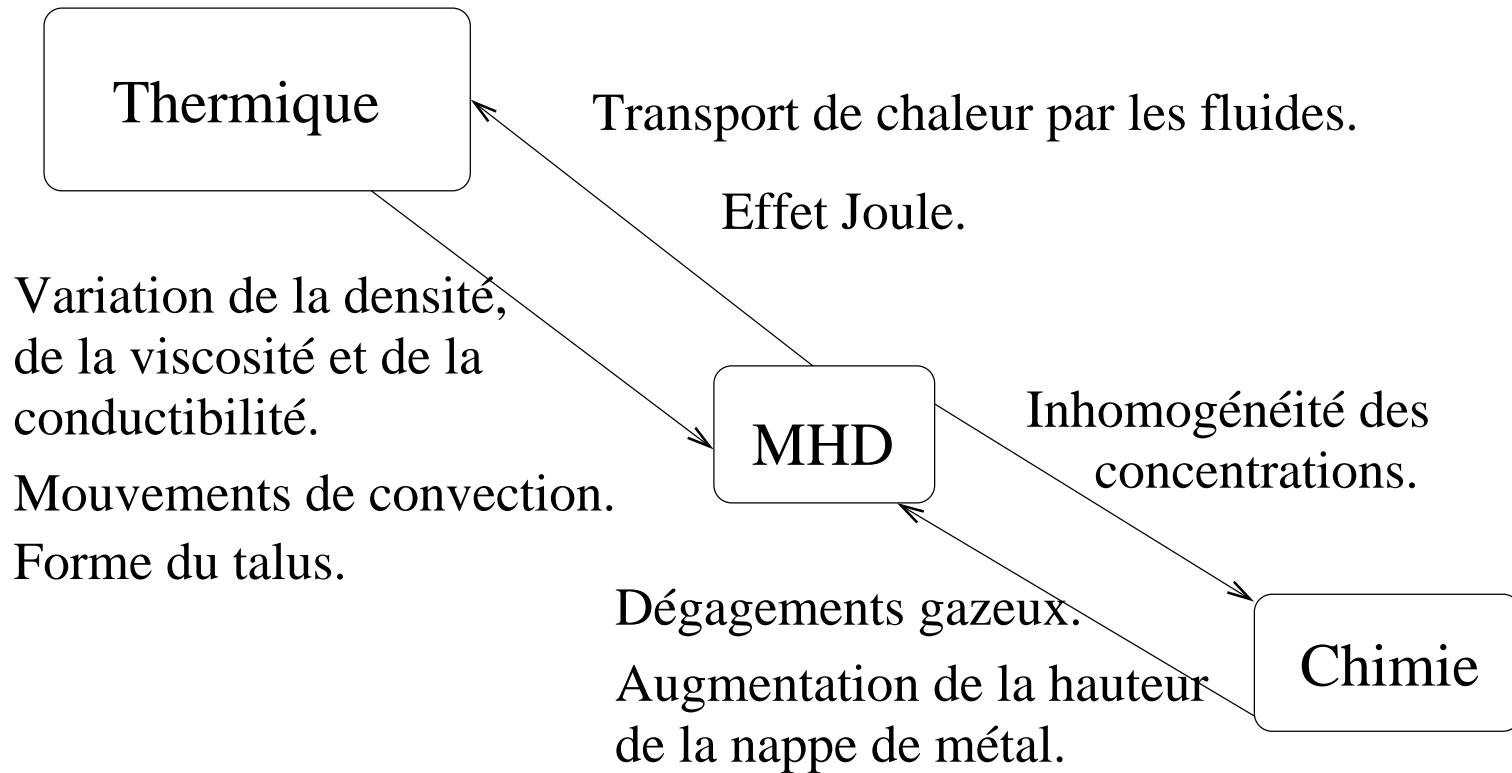
- Augmenter l'intensité pour augmenter la productivité.
- Diminuer la distance anode métal (environ  $5\text{cm}$  pour  $10\text{m}$  de longueur) pour diminuer l'effet Joule et les pertes de chaleur.

**Le compromis est difficile à trouver** : augmenter l'intensité conduit à une augmentation des champs magnétiques et donc des forces de Lorentz qui sont à l'origine du mouvement de l'interface. Il faut en particulier éviter que l'interface touche l'anode (ce qui court-circuite la cuve), et donc garder une distance anode métal suffisamment grande.

## Phénomènes physiques :

- magnétohydrodynamique (MHD),
- interface libre,
- ferromagnétisme,
- électrochimie,
- changements de phases (dégagement de bulle à l'anode, solidification sur les talus).

## Les couplages négligés



On se concentre sur le **couplage entre les phénomènes magnétiques et les phénomènes dynamiques.**

## Les différentes approches explorées :

- Utiliser des arguments mécaniques et physiques pour établir des critères de stabilité (Sele, Davidson, Moreau,...).
- Utiliser des équations linéarisées autour d'un état d'équilibre pour faire une analyse de stabilité linéaire (Rappaz, Romerio, Flueck, Descloux...).
- **Adopter une approche totalement non-linéaire : utilisation de simulations numériques directes pour analyser la stabilité d'un problème non-linéaire.**

Ici, les non-linéarités sont de deux types :

- algébrique (équations de la MHD),
- géométrique (mouvement de l'interface).



## 2. Les équations de la MHD

Equations de Maxwell + équations de Navier Stokes + loi d'Ohm.

### Hypothèses :

- on néglige  $\partial_t(\varepsilon \mathbf{E})$  (hypothèse des basses fréquences),
- $\mu = \mu_0$ .

### Equations de la MHD :

$$\begin{aligned}\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \operatorname{div} (2\eta \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) + \nabla p &= \rho \mathbf{f} + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{curl} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\ \partial_t \mathbf{B} + \operatorname{curl} \left( \frac{1}{\mu_0 \sigma} \operatorname{curl} \mathbf{B} \right) &= \operatorname{curl} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

## Conditions aux limites sur $\mathbf{B}$ :

Elles peuvent être de deux types :

- Si on choisit comme espace de fonctions tests des fonctions telles que  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$  au bord, on obtient des conditions aux limites essentielles du type

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n},$$

et des conditions aux limites naturelles du type

$$\text{curl}(\mathbf{B}) \times \mathbf{n} = \text{curl}(\mathbf{B}_0) \times \mathbf{n}.$$

- Si on choisit comme espace de fonctions tests des fonctions telles que  $\mathbf{B} \times \mathbf{n} = 0$  au bord, on obtient des conditions aux limites essentielles du type

$$\mathbf{B} \times \mathbf{n} = \mathbf{B}_0 \times \mathbf{n}.$$

L'autre condition nécessaire pour que le problème soit bien posé est  $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$ , mais elle est déjà implémentée (dans tout l'espace et pas seulement au bord).

## Les équations de la MHD pour un seul fluide

Nous utilisons une **stratégie de couplage** avec un **schéma d'Euler implicite**, de telle sorte que l'estimée d'énergie soit aussi vérifiée sur le problème discret. De plus, nous utilisons des **éléments finis stabilisés**.

### Egalité d'énergie (problème continu) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 + \int_{\Omega} \eta |\nabla \mathbf{u}|^2 = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{B}|^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{\mu \sigma} |\operatorname{curl} \mathbf{B}|^2 = \int_{\Omega} \operatorname{curl} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \rho |\mathbf{u}|^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu} \right) + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{|\operatorname{curl} \mathbf{B}|^2}{\mu^2} + \eta |\nabla \mathbf{u}|^2 \right) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}$$

Cette estimée d'énergie est **reproduite au niveau discret** par notre schéma.

## Stratégie de couplage

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{dt} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} + S \mathbf{B}^n \times \text{curl} \mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{f}, \\ \text{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0, \\ \frac{\mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}^n}{dt} + \frac{1}{Rm} \text{curl} (\text{curl} \mathbf{B}^{n+1}) - \text{curl} (\mathbf{u}^{n+1} \times \mathbf{B}^n) = 0. \end{array} \right.$$

On traite les termes non linéaires de telle sorte que :

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^n \times \text{curl} \mathbf{B}^{n+1} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \int_{\Omega} \text{curl} (\mathbf{u}^{n+1} \times \mathbf{B}^n) \cdot \mathbf{B}^{n+1}.$$

## Éléments finis stabilisés

On considère ici les équations stationnaires adimensionnées ( $\mathbf{a} = \mathbf{u}^n$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{B}^n$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} + S \mathbf{b} \times \text{curl } \mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{f}, \\ \text{div } \mathbf{u}^{n+1} = 0, \\ \frac{1}{Rm} \text{curl} (\text{curl } \mathbf{B}^{n+1}) - \text{curl} (\mathbf{u}^{n+1} \times \mathbf{b}) = 0. \end{array} \right.$$

Le principe est le même pour le cas instationnaire.

## Approximation de Galerkin

On cherche  $(\mathbf{u}, \mathbf{B}, p)$  dans  $V_h \times W_h \times M_h$  tels que

$$\Phi_G(\mathbf{u}, \mathbf{B}, p; \mathbf{v}, \mathbf{C}, q) = \langle F_G; \mathbf{v}, \mathbf{C}, q \rangle$$

pour tout  $(\mathbf{v}, \mathbf{C}, q)$  dans  $V_h \times W_h \times M_h$ , avec

$$\begin{aligned} \Phi_G(\mathbf{u}, \mathbf{B}, p; \mathbf{v}, \mathbf{C}, q) &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + a \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - p \operatorname{div} \mathbf{v} + S b \times \operatorname{curl} \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \right) dx \\ &+ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( \frac{S}{Rm} \operatorname{curl} \mathbf{B} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{C} + \alpha \operatorname{div} \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{C} - S \mathbf{u} \times b \cdot \operatorname{curl} \mathbf{C} \right) dx \\ \langle F_G; \mathbf{v}, \mathbf{C}, q \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx. \end{aligned}$$

## Approximation de Galerkin stabilisée

On cherche  $(\mathbf{u}, \mathbf{B}, p)$  dans  $V_h \times W_h \times M_h$  tels que

$$\Phi_G(\mathbf{u}, \mathbf{B}, p; \mathbf{v}, \mathbf{C}, q) + \Phi_S(\mathbf{u}, \mathbf{B}, p; \mathbf{v}, \mathbf{C}, q) = \langle F_G; \mathbf{v}, \mathbf{C}, q \rangle + \langle F_S, \mathbf{v}, \mathbf{C}, q \rangle$$

pour tout  $(\mathbf{v}, \mathbf{C}, q)$  dans  $V_h \times W_h \times M_h$ , avec

$$\begin{aligned} \Phi_S(\mathbf{u}, \mathbf{B}, p; \mathbf{v}, \mathbf{C}, q) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \tau_u \quad (a \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p + S b \times \mathbf{curl} \mathbf{B}) \cdot \\ &\quad (a \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla q + S b \times \mathbf{curl} \mathbf{C}) dx \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \tau_b \quad S^2 \mathbf{curl} (\mathbf{u} \times b) \cdot \mathbf{curl} (\mathbf{v} \times b) dx, \\ \langle F_S; \mathbf{v}, \mathbf{C}, q \rangle &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \tau_u \quad \mathbf{f} \cdot (a \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla q + S b \times \mathbf{curl} \mathbf{C}), \end{aligned}$$

avec  $\tau_u = \lambda_u h / \|\mathbf{a}\|_\infty$  et  $\tau_b = \lambda_b Rm h^2$ .

## Les équations de la MHD pour deux fluides

**Conservation de la masse** ( $\rho = \rho_1$  or  $\rho_2$ ) :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

**Equations de Navier-Stokes incompressibles** ( $\eta = \eta(\rho)$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\eta \epsilon(\mathbf{u})) + \nabla p = \rho \mathbf{f} + \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{array} \right.$$

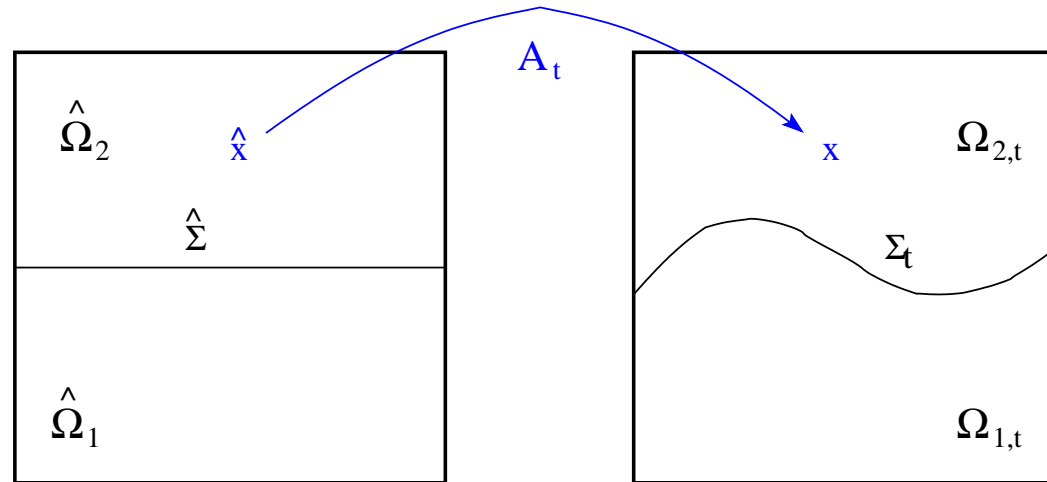
**Equations pour  $\mathbf{B}$**  ( $\sigma = \sigma(\rho)$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{B} + \operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu \sigma} \operatorname{curl} \mathbf{B}\right) = \operatorname{curl}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{array} \right.$$



On utilise une formulation **Arbitrary Lagrangian Eulerian** :

**Ingrédient 1** : Une application qui transporte le domaine.



$$\hat{x} \in \hat{\Omega}, \quad x = \hat{\mathcal{A}}_t(\hat{x}) \in \Omega(t), \quad \hat{\mathbf{J}}_t = \left[ \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_t}{\partial \hat{x}_j} \right], \quad \hat{J}_t = \det \hat{\mathbf{J}}_t$$

Vitesse du domaine :  $\mathbf{w}(t, \hat{\mathcal{A}}_t(\hat{x})) = \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}_t}{\partial t}(\hat{x})$ .

Dans notre cas, on choisit  $\mathbf{w}$  tel que

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

car le bord du domaine  $\Omega$  ne varie pas en fonction du temps et

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Sigma(t)$$

pour que la transformation **suive le mouvement de l'interface**.

**Ingrédient 2 :** Méthode de Galerkin avec des fonctions tests qui sont transportées par le domaine :  $\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v}(t, \hat{\mathcal{A}}_t(\hat{x})) = \hat{\mathbf{v}}(\hat{x})$ .

**Ingrédient 3 :** Une discrétisation particulière de la dérivée en temps : on met la dérivée en temps à l'extérieur de l'intégrale.

## Quelques détails sur la formulation discrète

**Lemme** Pour toute fonction régulière  $\psi$ , et toute fonction régulière  $\varphi$  qui est telle que  $\partial_t \varphi + \mathbf{w} \cdot \nabla \varphi = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi(t, x) \varphi(t, x) dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi(t, x) \partial_t \psi(t, x) + \varphi(t, x) \mathbf{w}(t, x) \cdot \nabla \psi(t, x) + \varphi(t, x) \operatorname{div}(\mathbf{w}(t, x)) \psi(t, x) dx. \end{aligned}$$

Ce lemme est basé sur la formule d'Euler :

$$\frac{\partial \hat{J}_t}{\partial t}(\hat{x}) = \hat{J}_t(\hat{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(t, \hat{\mathcal{A}}_t(\hat{x})).$$

**Remarque** : les opérateurs de dérivations  $\operatorname{div}$  et  $\nabla$  s'appliquent sur des fonctions exprimées dans le référentiel actuel ( $\operatorname{div}_x, \nabla_x$ ).

## Exemple : discrétisation du terme $\partial_t \mathbf{u}$ .

Soit  $\mathbf{v}$  une fonction test telle que  $\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$ .

$\partial_t \mathbf{u} \longrightarrow$  Multiplication par la fonction test  $\mathbf{v}$  et intégration en espace,

$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \longrightarrow$  Application du lemme précédent pour sortir la dérivée en temps,

$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \longrightarrow$  Discrétisation en temps,

$\frac{1}{\delta t} \left( \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(t_{n+1}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(t_n) \right) - \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(t_{n+1}) - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{w}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(t_{n+1})$ .

L'algorithme global pour passer de  $t_n$  à  $t_{n+1}$  se divise donc en **trois phases** :

1- calcul des termes sur le maillage à l'instant  $t_n$  (exemple :  $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(t_n)$ ),

2- détermination de la vitesse  $\mathbf{w}^n$  et déplacement du maillage suivant  $\mathbf{w}^n$  par l'application  $x \mapsto x + \delta t \mathbf{w}^n(x)$ ,

3- calcul des termes sur le maillage à l'instant  $t_{n+1}$  (exemple :  $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(t_{n+1})$ ) et résolution du système linéaire obtenu.

Calcul de la vitesse du domaine :  $\mathbf{w}^n = (0, 0, w)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta w = 0 & \text{sur } \Omega_i^n, i = 1, 2, \\ w = \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} / n_z & \text{sur } \Sigma^n, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

**Lemme (“GCL”)** Soit  $\psi$  une fonction définie sur  $\Omega_i^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i^{n+1}} \psi(x) dx - \int_{\Omega_i^n} \psi \circ \mathcal{A}_{n,n+1}(y) dy &= \delta t \int_{\Omega_i^n} \psi \circ \mathcal{A}_{n,n+1}(y) \mathbf{div}_y(\mathbf{w}^n) dy, \\ &= \delta t \int_{\Omega_i^{n+1}} \psi(x) \mathbf{div}_x(\mathbf{w}^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1})(x) dx. \end{aligned}$$

**Remarque** : C'est l'analogue discret de la formule

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \psi(x) dx = \int_{\Omega(t)} \psi(x) \operatorname{div} \mathbf{w} dx.$$

**Preuve** :

Changement de variable  $x = \mathcal{A}_{n,n+1}(y)$  :

$$\int_{\Omega_i^{n+1}} \psi(x) dx = \int_{\Omega_i^n} \psi \circ \mathcal{A}_{n,n+1}(y) J_{n,n+1} dy.$$

Or,

$$\mathbf{J}_{n,n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta t \frac{\partial w}{\partial y_1} & \delta t \frac{\partial w}{\partial y_2} & 1 + \delta t \frac{\partial w}{\partial y_3} \end{bmatrix},$$

et donc

$$J_{n,n+1} = 1 + \delta t \operatorname{div}_y \mathbf{w}^n.$$

Preuve analogue pour la deuxième relation.

En se restreignant à un **déplacement vertical des noeuds** ( $\mathbf{w} = (0, 0, w)$ ), nous prouvons que notre schéma :

- **conserve la masse** de chacun des fluides,
- est **stable** en norme d'énergie.

## Conservation de la masse

### Proposition

Sous les hypothèses :

1- les normales aux noeuds de  $\Sigma(t)$  sont calculées afin d'avoir

$$\int_{\Sigma} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_h d\sigma = \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \mathbf{u}_h dx,$$

2- on a la propriété

$$\int_{\Omega_1} \operatorname{div} \mathbf{u}_h dx = 0,$$

3- la GCL est satisfaite,

la masse de chaque fluide est conservée.



Preuve :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1^{n+1}} dx - \int_{\Omega_1^n} dx &= \delta t \int_{\Omega_1^n} \operatorname{div} \mathbf{w}_h^n dx && \text{GCL} \\ &= \delta t \int_{\Sigma^n} \mathbf{w}_h^n \cdot \mathbf{n}_h dx && \text{calcul des normales} \\ &= \delta t \int_{\Sigma^n} \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}_h dx && \text{car } \mathbf{w}_h^n \cdot \mathbf{n}_h = \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n}_h \\ &= \delta t \int_{\Omega_1^n} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n dx && \text{calcul des normales} \\ &= 0 \end{aligned}$$

## Stabilité en norme d'énergie

### Proposition

On suppose que  $f$  et les conditions aux limites sont nulles.

On note l'énergie totale du système

$$E^n = \int_{\Omega^n} \frac{\rho |\mathbf{u}^n|^2}{2} dy + \int_{\Omega^n} \frac{|\mathbf{B}^n|^2}{2\mu} dy$$

Alors

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\delta t} + \int_{\Omega^{n+1}} 2\eta |\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^{n+1})|^2 dx + \int_{\Omega^{n+1}} \frac{1}{\mu\sigma} |\mathbf{curl} \mathbf{B}^{n+1}|^2 dx \leq 0.$$

## Preuve

On prend  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{n+1}$  et  $C = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^{n+1}$ .

## Premier argument

La manière dont on a linéarisé les équations de la MHD permet de compenser exactement les termes de couplage ...

## Second argument

On modifie le terme d'advection dans Navier-Stokes :

$$\tilde{c}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = c_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \operatorname{div} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 dx + \frac{\delta \rho}{2} \int_{\Sigma_t} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 d\sigma$$

Au niveau continu, on a :

$$c_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tilde{c}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

D'où

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\mathbf{w}^n}^{n+1}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) &= \int_{\Omega^{n+1}} \rho(\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n) \cdot \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}^{n+1}|^2}{2} \right) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \operatorname{div} \mathbf{u}^n dx + \frac{\delta \rho}{2} \int_{\Sigma^{n+1}} (\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n) \cdot \mathbf{n} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\sigma \end{aligned}$$

La première intégrale donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{n+1}} \rho(\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n) \cdot \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}^{n+1}|^2}{2} \right) dx &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \operatorname{div} (\rho(\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n)) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \operatorname{div} (\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n) dx - \frac{\delta \rho}{2} \int_{\Sigma^{n+1}} (\mathbf{u}^n - \mathbf{w}^n) \cdot \mathbf{n} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

On a donc,

$$\tilde{c}_{\mathbf{w}^n}^{n+1}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \operatorname{div} \mathbf{w}^n dx = \frac{1}{2} d^{n+1}(\mathbf{w}^n, \rho \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})$$

### Troisième argument : GCL

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega^{n+1}} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dx - \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega^n} \rho \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} dy &= \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega^{n+1}} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dx \\ - \frac{1}{2\delta t} \int_{\Omega^n} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dy - \frac{1}{2\delta t} \int_{\Omega^n} \rho |\mathbf{u}^n|^2 dy + \frac{1}{2\delta t} \int_{\Omega^n} \rho |\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n|^2 dy \end{aligned}$$

d'où, en utilisant le lemme,

$$\frac{1}{\delta t} \int_{\Omega^{n+1}} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dx - \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega^n} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dy = \int_{\Omega^{n+1}} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \operatorname{div} \mathbf{w}^n dx$$

et donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega^{n+1}} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dx - \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega^n} \rho \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{u}^n dy = \\ & \frac{1}{2\delta t} \int_{\Omega^{n+1}} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 dx - \frac{1}{2\delta t} \int_{\Omega^n} \rho |\mathbf{u}^n|^2 dy \\ & + \frac{1}{2\delta t} \int_{\Omega^n} \rho |\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega^{n+1}} \rho |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \operatorname{div} \mathbf{w}^n dx. \end{aligned}$$

## Tension de surface

Nous avons également inclus la tension de surface (rôle dissipatif quand on étudie des phénomènes d'instabilité) :

$$TS = \gamma H \mathbf{n}$$

avec  $\gamma$  le coefficient de tension de surface (qui vaut 0.5 N/m à l'interface aluminium / cryolite, à comparer avec 0.07 N/m pour une interface eau / air),  $\mathbf{n}$  est la normale et  $H$  est la courbure moyenne comptée positivement selon la normale.

## Expression de la courbure moyenne

La courbure moyenne  $H$  est l'opposée de la trace de la différentielle de l'application de Gauss (l'application qui à un point de la surface associe la normale en ce point) :

$$H = -\text{tr}(\nabla_s \mathbf{n})$$

avec  $\nabla_s$  le gradient surfacique (la projection orthogonale du gradient sur l'espace tangent).

## Formule de la divergence

$$\int_{\Sigma} \text{tr}(\nabla_s \mathbf{n}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Sigma} \text{tr}(\nabla_s \mathbf{v}) d\sigma - \int_{\partial\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{m} dl$$

avec  $\mathbf{m}$  la normale à  $\partial\Sigma$  (dans l'espace tangent à  $\Sigma$ ).



## Formulation faible

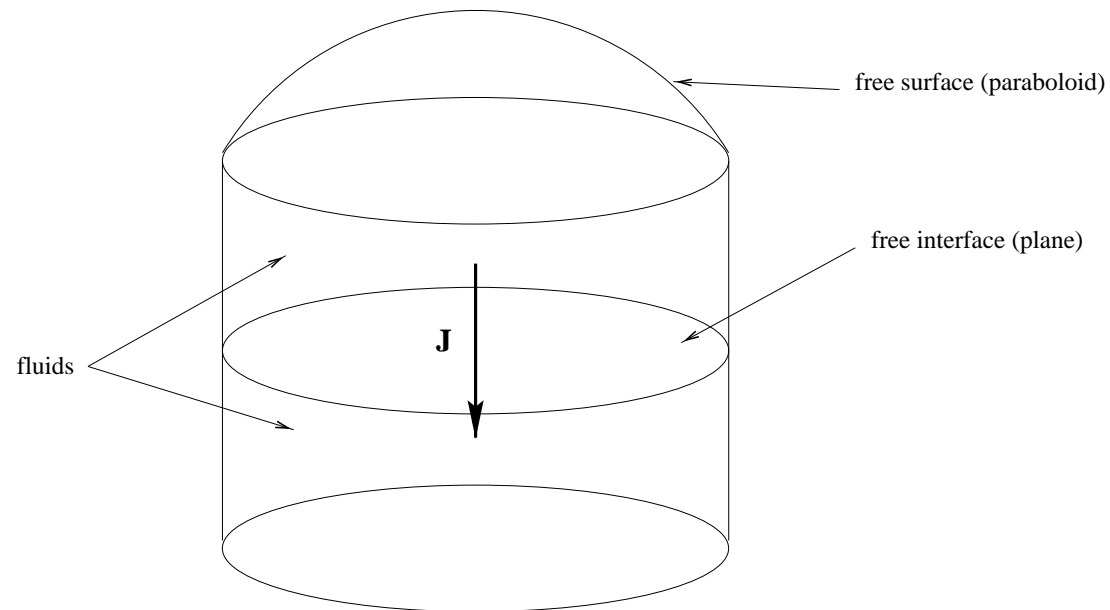
On obtient donc la formulation faible suivante :

$$\int_{\Sigma} \mathbf{T}\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = -\gamma \int_{\Sigma} \text{tr}(\nabla_s \mathbf{v}) \, d\sigma + \gamma \int_{\partial\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{m} \, dl.$$

Il reste à exprimer  $\text{tr}(\nabla_s \mathbf{v})$  sur la surface discrétisée  $\Sigma$ . On utilise pour cela la paramétrisation locale des éléments.

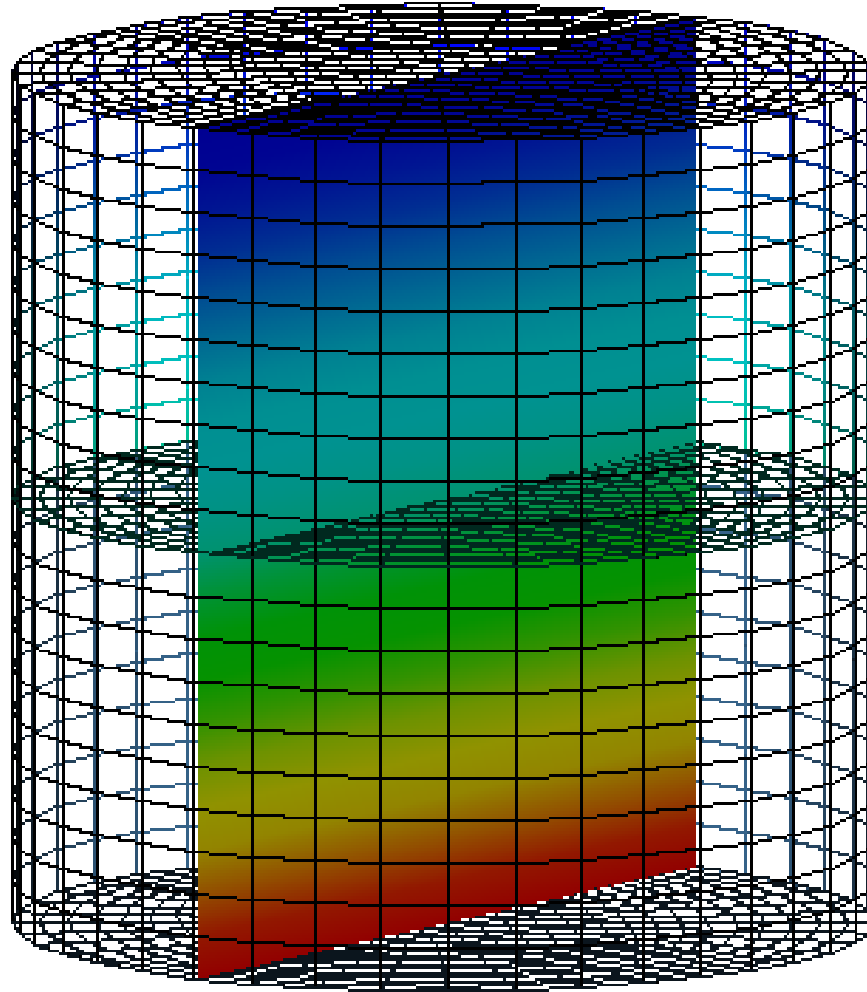
### 3. Simulations numériques

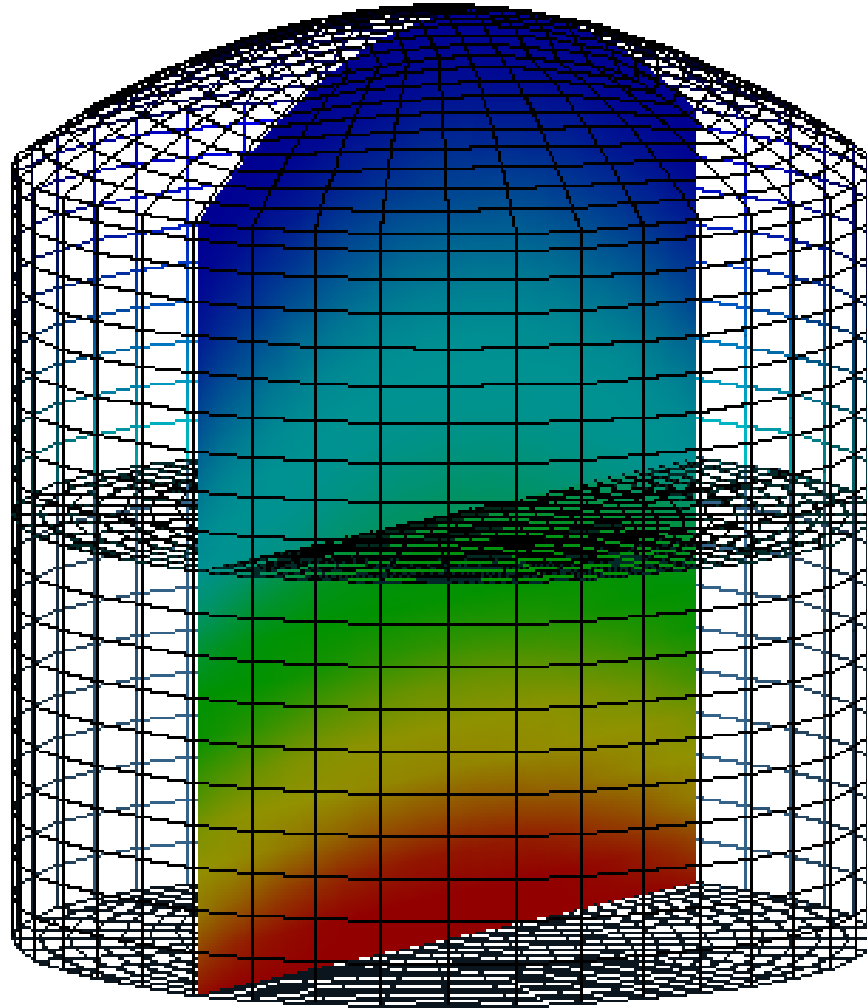
Première expérience : deux fluides avec interface et surface libre

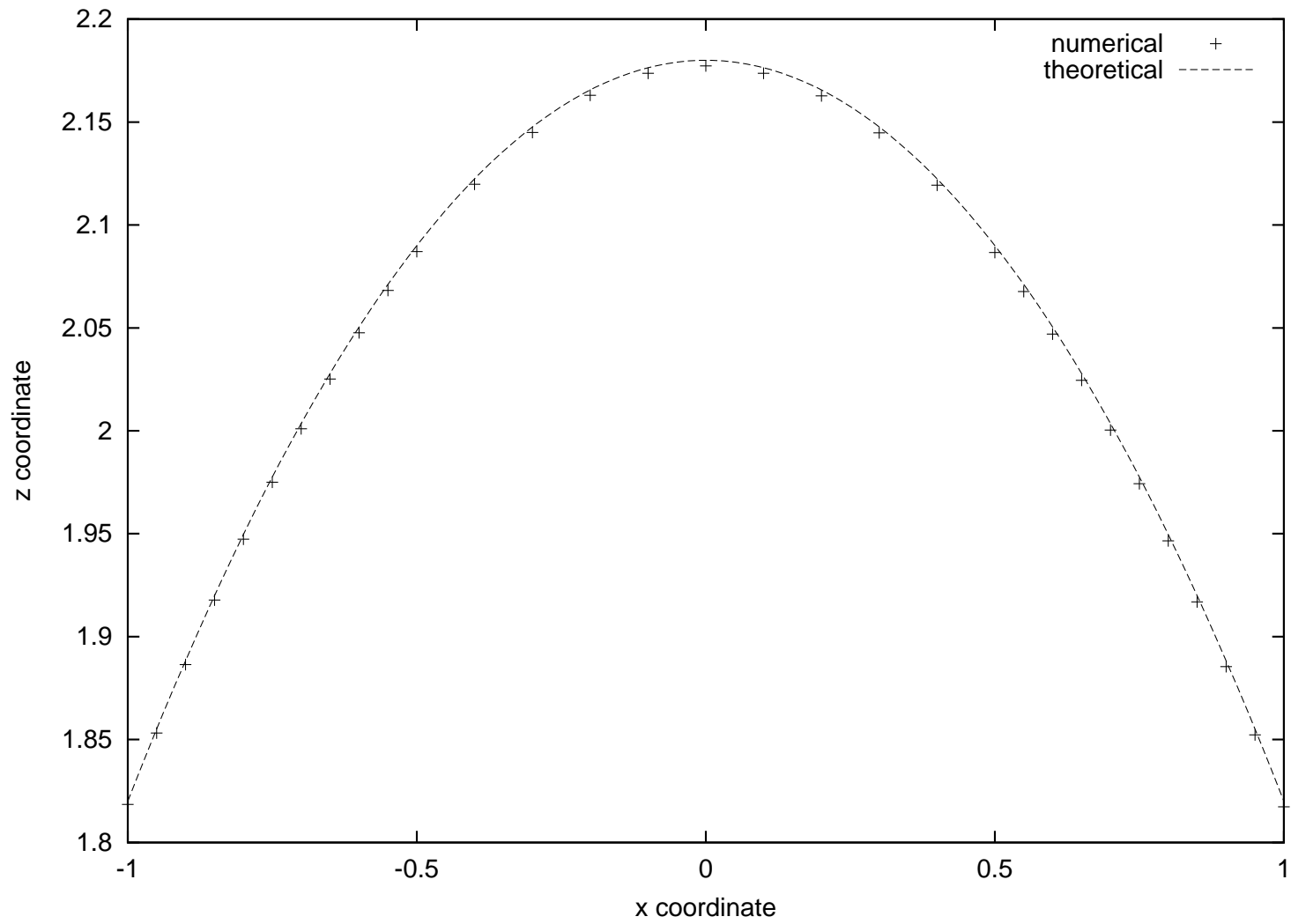


*Etat stationnaire connu :*

- **Surface libre** :  $h_2(r) = h_2^0 + \frac{S F r J_0^2 R^2}{8M} \left(1 - \frac{2r^2}{R^2}\right)$  (paraboloïde).
- **Interface** : plane et horizontale.







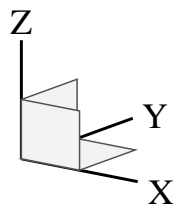
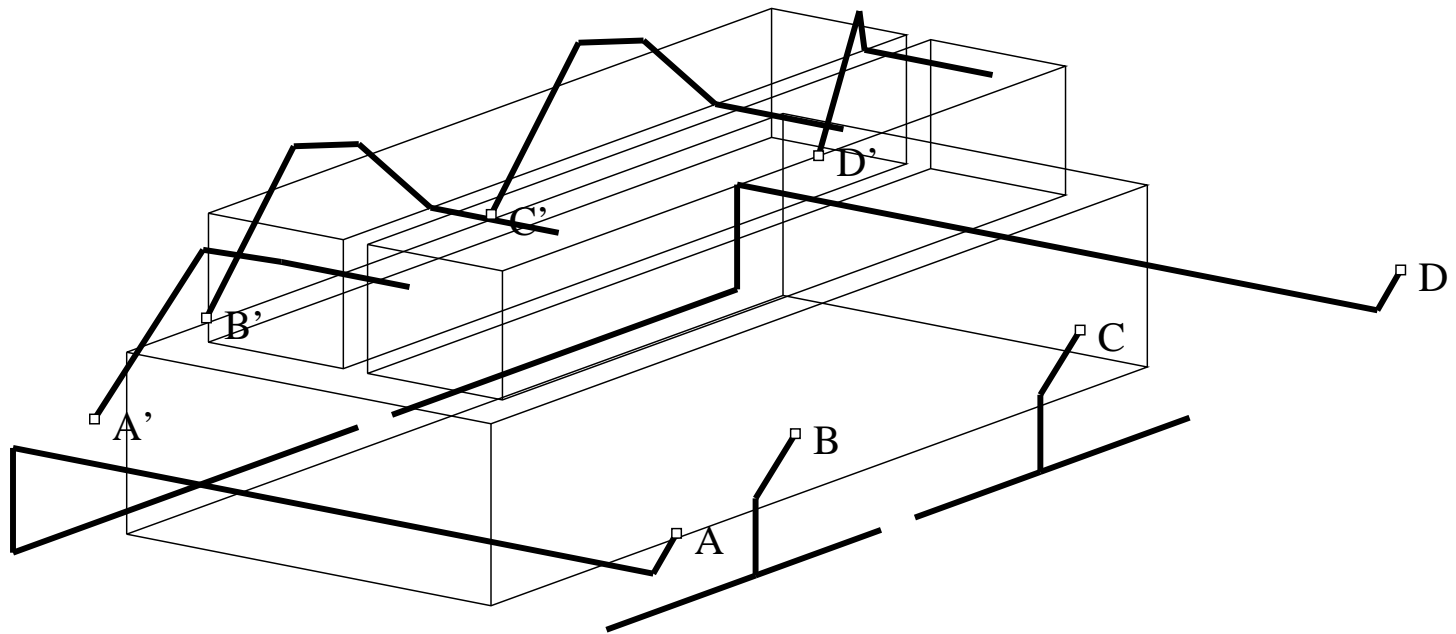
## Deuxième expérience :

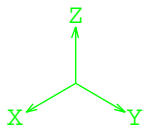
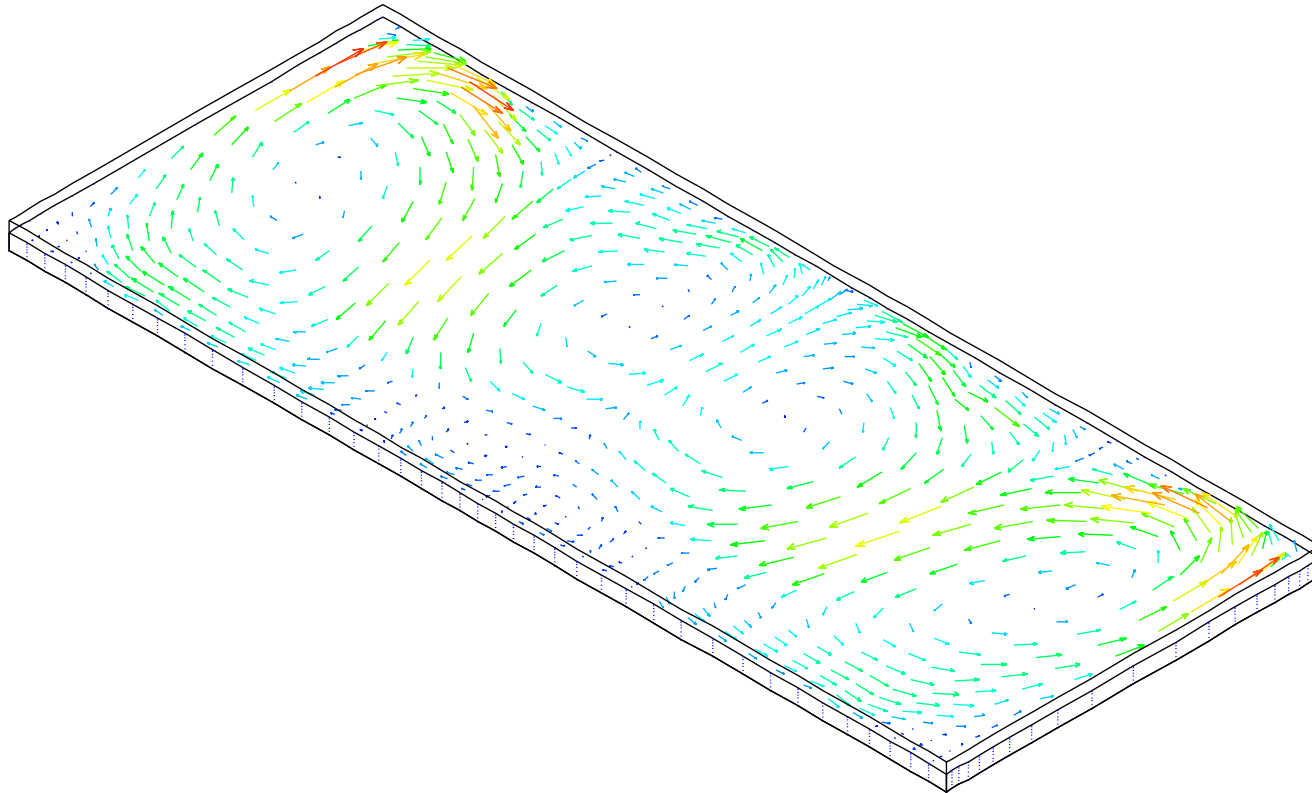
L'état stationnaire de la cuve. Deux types de résultat :

- Un calcul stationnaire avec interface fixée pour obtenir le champ de vitesse et le champ magnétique.
- Un calcul instationnaire en temps long avec interface libre pour obtenir la forme de l'interface.

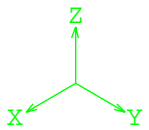
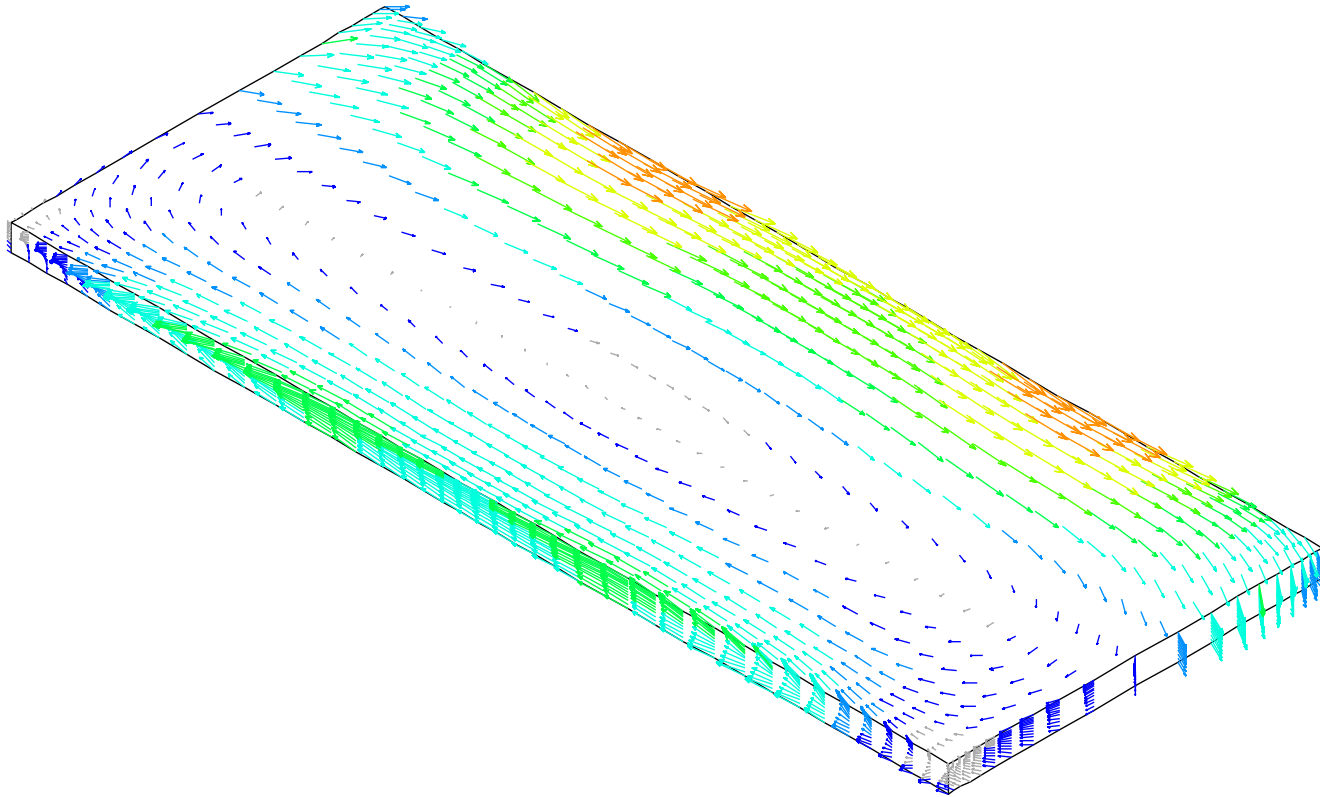
Les données du modèle :

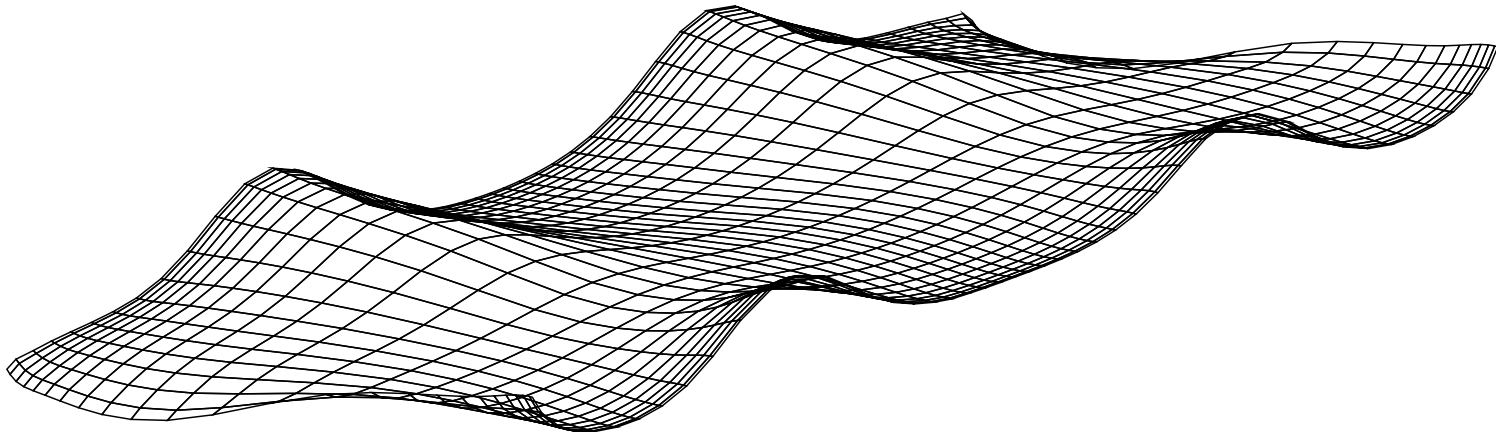
- Le maillage de la cuve,
- Les caractéristiques physiques des fluides (on multiplie artificiellement la viscosité par 100 ou 1000),
- Le champ magnétique au bord de la cuve (qui sert de conditions aux limites pour les équations). Ce champ est précalculé en prenant en compte la configuration des conducteurs autour de la cuve.







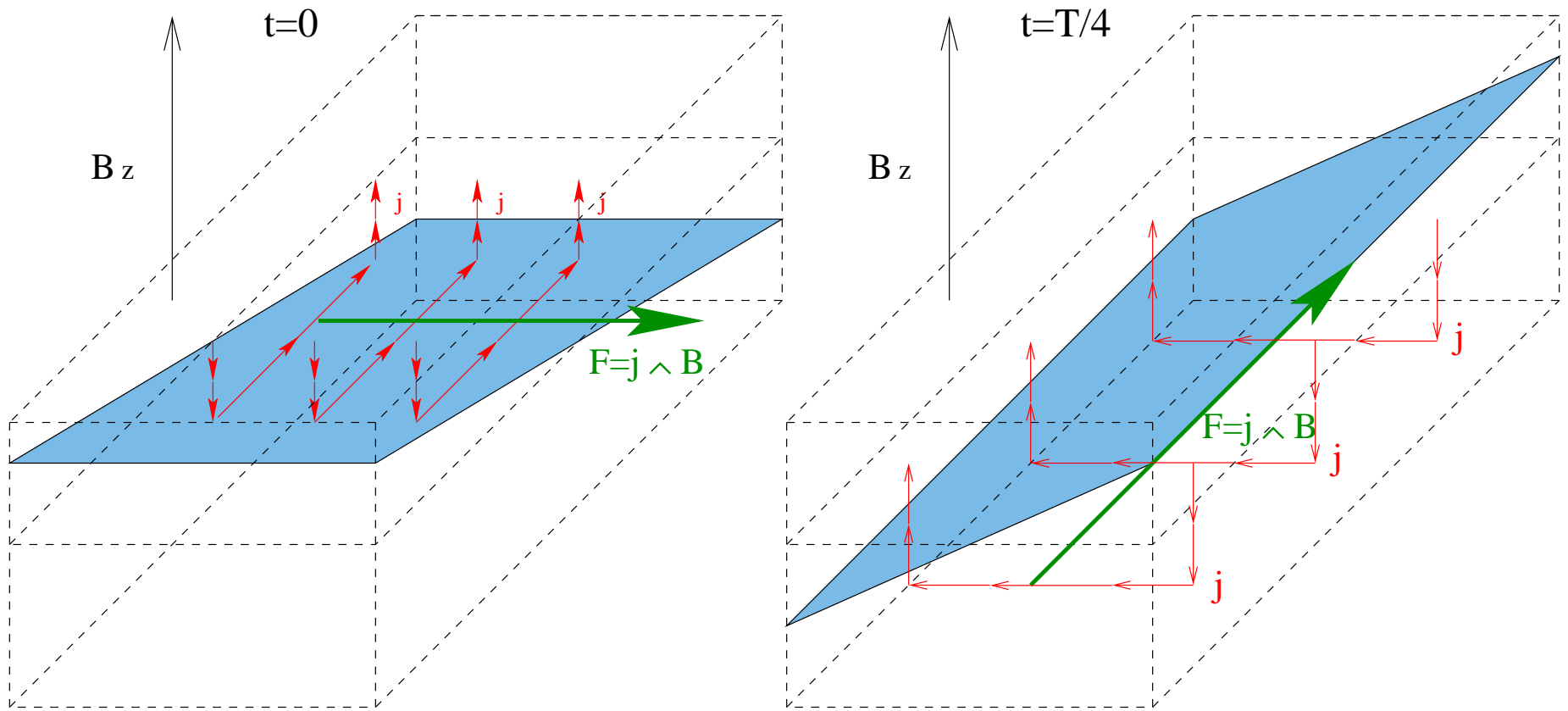




### Troisième expérience : le roulement de la nappe de métal.

- Deux fluides en présence d'un champ magnétique créé par le passage du courant et auquel on ajoute une composante verticale,
- Une perturbation initiale de l'interface crée un courant perturbé  $j$ , essentiellement horizontal dans le fluide inférieur et vertical dans le fluide supérieur,
- Ce courant interagit avec la composante **verticale** du champ magnétique, qui crée une force **horizontale**,
- Ceci entraîne finalement un mouvement de **rotation** de l'interface qui peut devenir instable.

Ce phénomène est connu sous le nom de “**rolling**” dans la littérature de l'électrolyse de l'aluminium (cf. notamment Davidson, Lindsay, J. Fluid Mech., 1998).



## Description de l'expérience :

On considère une cuve ronde (les résultats de stabilité linéaire montrent que dans cette géométrie, le phénomène est instable).

$0 < t \leq 1$  :

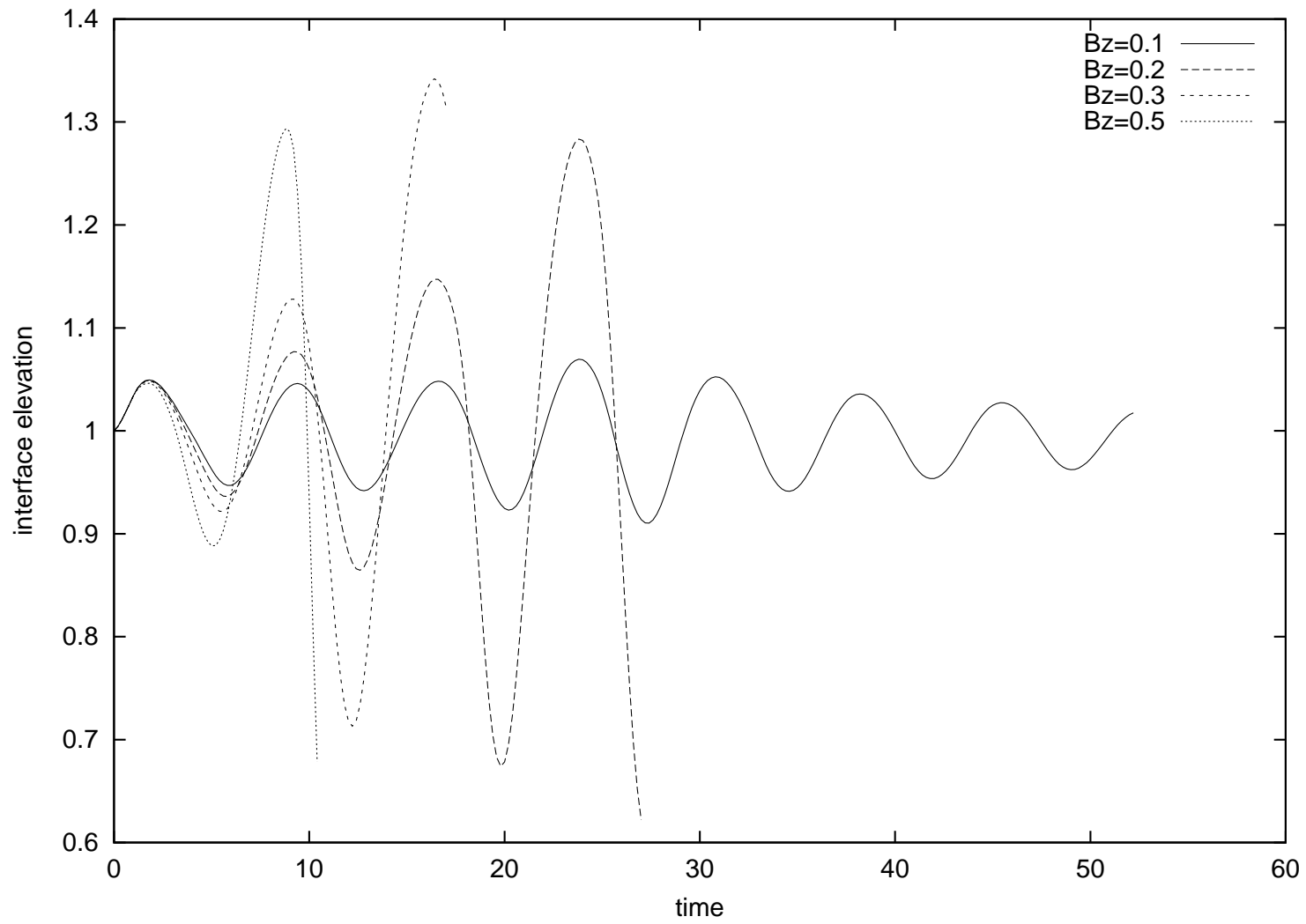
- gravité inclinée de  $5^\circ$
- courant homogène au bord

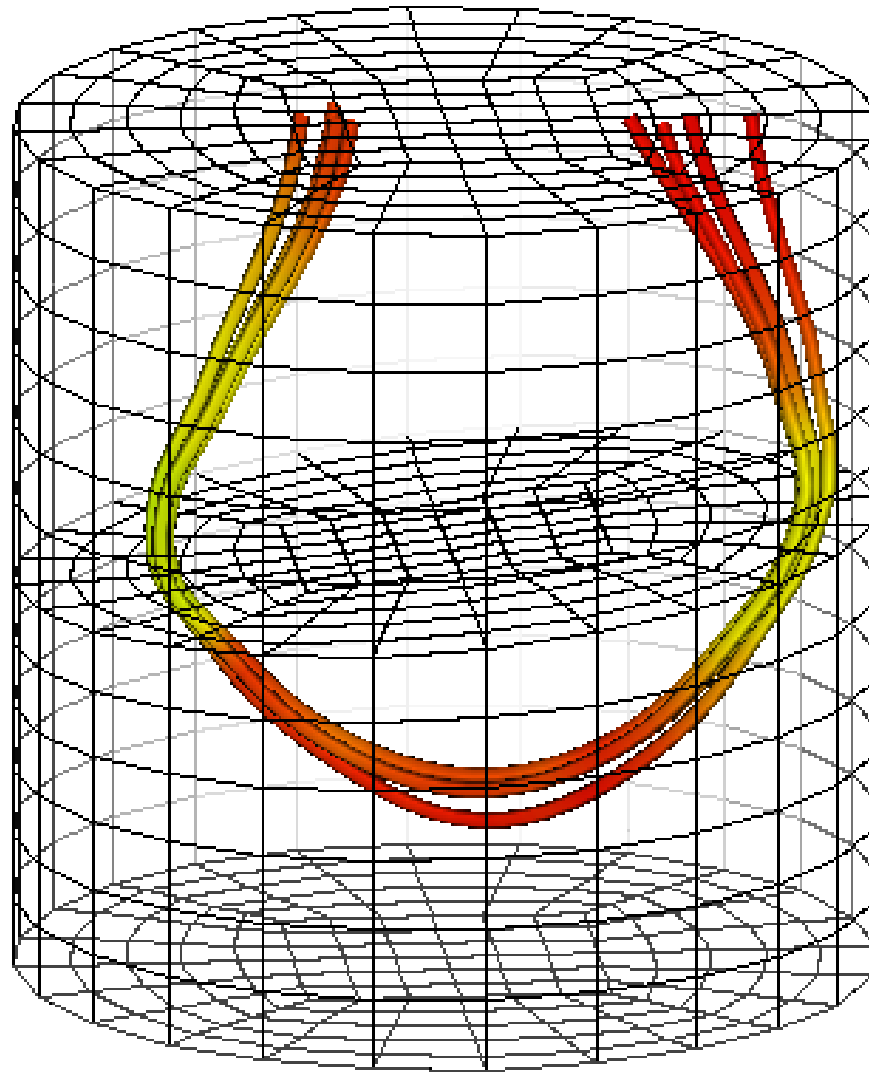
$1 < t < 25$  :

- gravité verticale
- courant homogène au bord
- champ magnétique vertical  $B_z$

$25 \leq t$  :

- gravité verticale
- courant homogène au bord





## Conclusion

Nous considérons que notre approche non linéaire est désormais validée et testée :

- elle est basée sur **une analyse mathématique complète** d'une hiérarchie de modèles pour sélectionner celui qui semble le mieux posé mathématiquement,
- elle n'inclut **aucune linéarisation** des équations,
- elle donne **de bons résultats sur des cas tests** de la littérature MHD,
- elle permet **de retrouver et même de compléter des phénomènes** identifiés par des spécialistes de la mécanique.

Nous avons désormais une version parallélisée du code (travail de thèse d'A. Orriols).

Travail en cours : **contrôle optimal de l'interface.**



## Références

- J.-F. Gerbeau, C. Le Bris, [Existence of solution for a density-dependent magnetohydrodynamic equation](#), Advances in Differential Equations, vol. 2, number 3, p. 427-452, 1997,
- J.-F. Gerbeau, C. Le Bris, [On a coupled system arising in Magnetohydrodynamics](#), Applied Mathematics Letters, Vol. 12, num. 3, p. 427-452, 1999,
- J.-F. Gerbeau, C. Le Bris, [Comparison between two numerical methods for a magnetostatic problem](#), Calcolo, Vol. 37, p. 1-20, 2000,
- J.-F. Gerbeau, C. Le Bris, [Mathematical study of a coupled system arising in magnetohydrodynamics](#), p. 355-367, Lecture Notes in Pure and Applied Sciences, vol. 215, Marcel Dekker, 2000,
- J.-F. Gerbeau, [A stabilized finite element method for the incompressible magnetohydrodynamic equations](#), Numerische Mathematik, Vol. 87, num. 1, p. 83-111, 2000,

- J.-F. Gerbeau, C. Le Bris, T. Lelièvre, [Simulations of MHD flows with moving interfaces](#), Journal of Computational Physics, Vol. 184, Num. 1, p. 163-191, 2003,
- J.-F. Gerbeau, T. Lelièvre, C. Le Bris, [Modeling and simulation of the industrial production of aluminium](#), Computers and fluids, Vol. 33, p. 801-814, 2004.