Estimation de frontières libres d'options américaines sur plusieurs actifs

Etienne Chevalier

echevali@univ-mlv.fr

Université de la Marne-la-Vallée

Le modèle

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on considère d actifs risqués dont les valeurs à la date t sont les coordonnées du processus S_t^x solutions de :

$$\begin{cases} dS_t^{x_i,i} = S_t^{x_i,i}((r-\delta_i)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_t^j) \\ S_0^{x_i,i} = x_i \end{cases}$$

avec $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ mouvement brownien standard de $\mathbb{R}^d$, $r > 0$, $\delta \in [0, +\infty[^d$ et $\sigma \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.
On suppose qu'il existe m, $M > 0$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \; m\|x\|^2 \leq x^* \sigma \sigma^* x \leq M\|x\|^2.$$

Le modèle

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on considère d actifs risqués dont les valeurs à la date t sont les coordonnées du processus S_t^x solutions de :

$$\begin{cases} dS_t^{x_i,i} = S_t^{x_i,i}((r-\delta_i)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_t^j) \\ S_0^{x_i,i} = x_i \end{cases}$$

avec $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ mouvement brownien standard de $\mathbb{R}^d$,
$r > 0$, $\delta \in [0, +\infty[^d$ et $\sigma \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.
On suppose qu'il existe m, $M > 0$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ m\|x\|^2 \leq x^* \sigma \sigma^* x \leq M\|x\|^2.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$ et $K \in \mathbb{R}^+$, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$f(x) = (K - \langle \alpha, x \rangle)^+.$$

Options américaine et bermudéenne

A la date t, la valeur d'une option américaine d'échéance T et de payoff f est $P(T-t, S_t^x)$ où

$$P(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} E[e^{-r\tau} f(S_\tau^x)].$$

Options américaine et bermudéenne

A la date t, la valeur d'une option américaine d'échéance T et de payoff f est $P(T-t, S_t^x)$ où

$$P(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} E[e^{-r\tau} f(S_\tau^x)].$$

On considère une option bermudéenne associée au pay-off f, de maturité T et offrant n dates d'exercice.
On pose $h = T/n$. A la date kh, avec $k \in \{0, .., n\}$, la valeur de l'option est $P^n(T-kh, S_{kh}^x)$ où

$$P^n(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}^n} \mathbb{E}[e^{-r\tau} f(S_\tau^x)],$$

et $\mathcal{T}_{0,t}^n$ est l'ensemble des $\mathbb{F}$-temps d'arrêt à valeurs dans

$\{ph : p \in \mathbb{N}$ et $0 \le ph \le t\}$.

Région d'exercice

P est solution de l'inégalité variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{M}P \leq 0, \quad f \leq P, \quad \mathcal{M}P(P-f) = 0 \quad \text{p.p..} \\ P(0,x) = f(x) \quad \text{sur} \quad [0,+\infty[^d, \end{cases}$$

où nous avons posé :

$$\mathcal{M}h(t,x) = -\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^*)_{i,j}x_i x_j \frac{\partial^2 h}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d}(r-\delta_i)x_i \frac{\partial h}{\partial x_i} - rh.$$

Région d'exercice

P est solution de l'inégalité variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{M}P \leq 0, \quad f \leq P, \quad \mathcal{M}P(P-f) = 0 \quad \text{p.p..} \\ P(0,x) = f(x) \quad \text{sur} \quad [0,+\infty[^d, \end{cases}$$

où nous avons posé :

$$\mathcal{M}h(t,x) = -\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^*)_{i,j}x_i x_j \frac{\partial^2 h}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d}(r-\delta_i)x_i \frac{\partial h}{\partial x_i} - rh.$$

On définit les sections temporelles des régions d'exercice américaine et bermudéenne :

$$\begin{aligned} \forall t \in]0,T], \quad \mathcal{E}_t &= \{(t,x) \in]0,T] \times [0,+\infty[^d \colon P(t,x) = f(x)\} \\ \mathcal{E}_t^n &= \{x \in [0,+\infty[^d \colon P^n(t,x) = f(x)\}. \end{aligned}$$

Paramétrisation des régions d'exercice

- $\forall t \in]0, T], \quad \mathcal{E}_t$ et $\mathcal{E}_t^n$ contiennent 0 et sont des convexes fermés dans $[0, +\infty[^d$.

Paramétrisation des régions d'exercice

- $\forall t \in]0, T], \quad \mathcal{E}_t$ et $\mathcal{E}_t^n$ contiennent 0 et sont des convexes fermés dans $[0, +\infty[^d$.
- Pour $0 < s < t \leq T$, $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{E}_s$ et $\mathcal{E}_t^n \subset \mathcal{E}_s^n$

Paramétrisation des régions d'exercice

- $\forall t \in]0,T], \quad \mathcal{E}_t$ et $\mathcal{E}_t^n$ contiennent 0 et sont des convexes fermés dans $[0,+\infty[^d$.
- Pour $0 < s < t \leq T$, $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{E}_s$ et $\mathcal{E}_t^n \subset \mathcal{E}_s^n$
- $\forall k \in \{1,..,n\}, \quad \mathcal{E}_{kh} \subset \mathcal{E}_{kh}^n$

Paramétrisation des régions d'exercice

- $\forall t \in]0, T], \quad \mathcal{E}_t$ et $\mathcal{E}_t^n$ contiennent 0 et sont des convexes fermés dans $[0, +\infty[^d$.
- Pour $0 < s < t \leq T$, $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{E}_s$ et $\mathcal{E}_t^n \subset \mathcal{E}_s^n$
- $\forall k \in \{1, .., n\}, \quad \mathcal{E}_{kh} \subset \mathcal{E}_{kh}^n$

Pour $\epsilon \in [0, +\infty[^d$ normé, on pose :

$$\begin{aligned} s(t, \epsilon) &= \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : P(t, \lambda\epsilon) > f(\lambda\epsilon)\} \\ s^n(t, \epsilon) &= \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : P^n(t, \lambda\epsilon) > f(\lambda\epsilon)\}. \end{aligned}$$

Paramétrisation des régions d'exercice

- $\forall t \in]0,T], \quad \mathcal{E}_t$ et $\mathcal{E}_t^n$ contiennent 0 et sont des convexes fermés dans $[0,+\infty[^d$.
- Pour $0 < s < t \leq T$, $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{E}_s$ et $\mathcal{E}_t^n \subset \mathcal{E}_s^n$
- $\forall k \in \{1,..,n\}, \quad \mathcal{E}_{kh} \subset \mathcal{E}_{kh}^n$

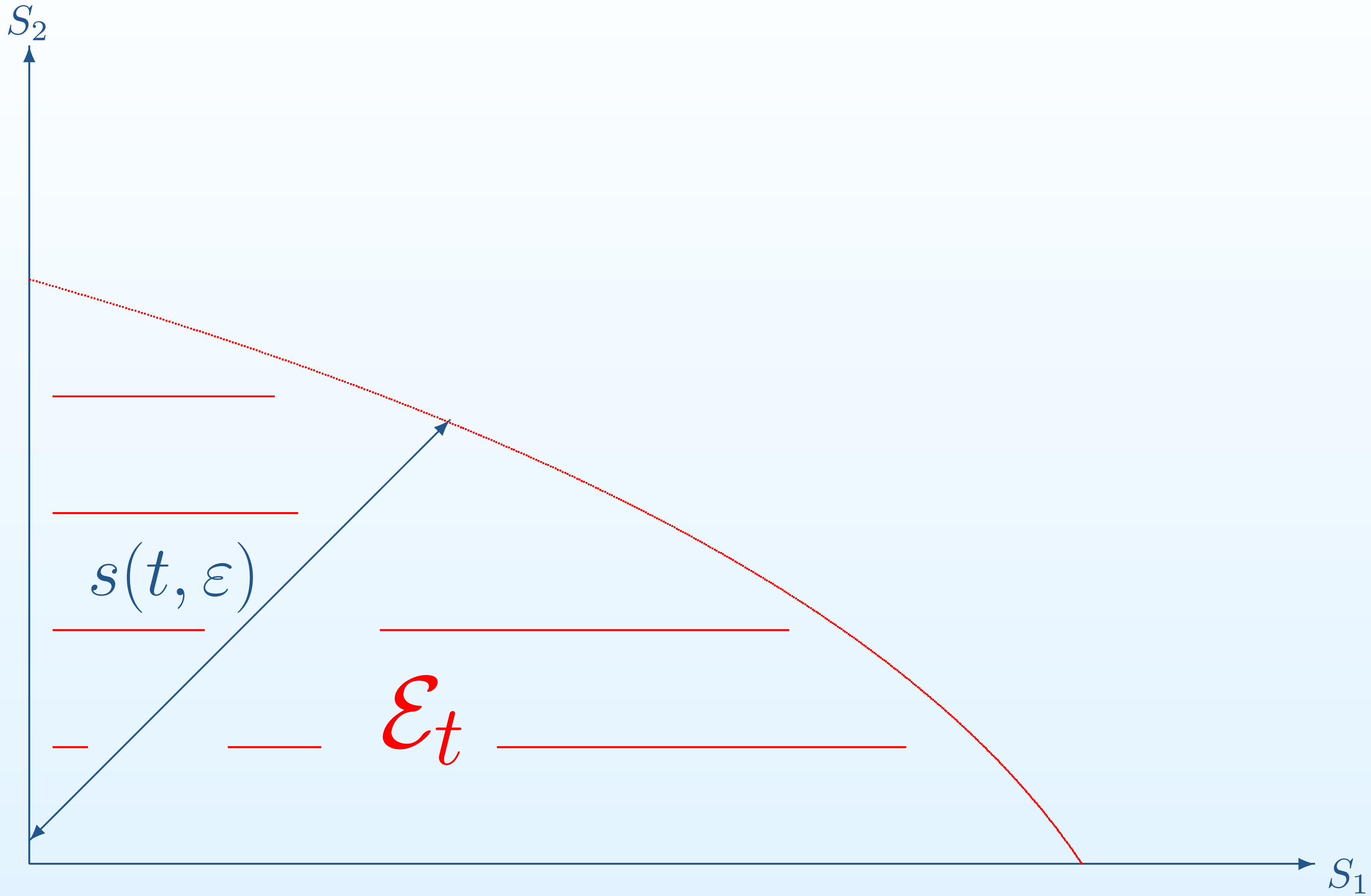
Pour $\epsilon \in [0,+\infty[^d$ normé, on pose :

$$\begin{aligned} s(t,\epsilon) &= \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : P(t,\lambda\epsilon) > f(\lambda\epsilon)\} \\ s^n(t,\epsilon) &= \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : P^n(t,\lambda\epsilon) > f(\lambda\epsilon)\}. \end{aligned}$$

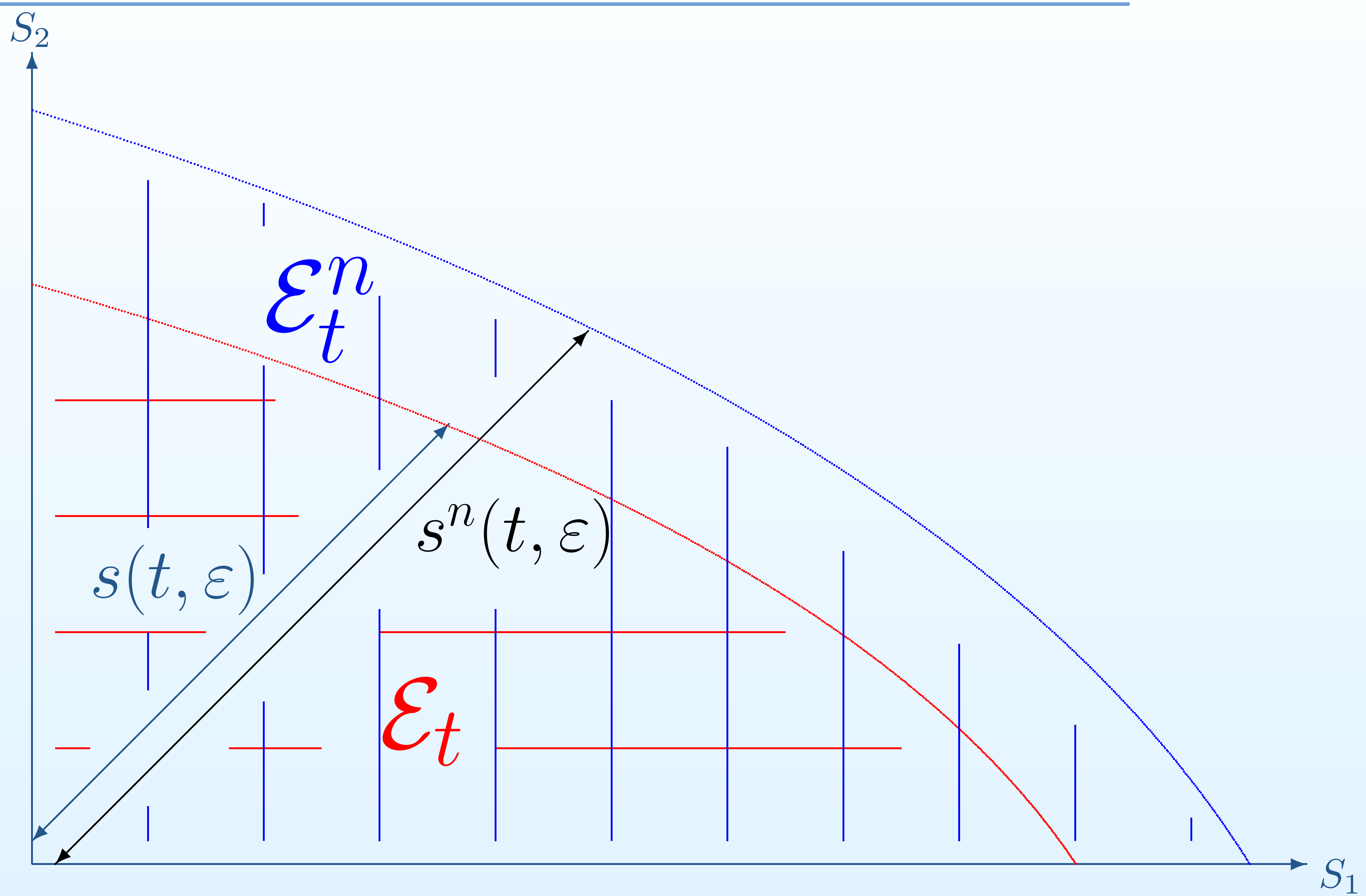
On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t &= \{x \in [0,+\infty[^d: \quad \|x\| \leq s(t,\frac{x}{\|x\|})\} \\ \mathcal{E}_{kh}^n &= \{x \in [0,+\infty[^d: \quad \|x\| \leq s^n(kh,\frac{x}{\|x\|})\}. \end{aligned}$$

Représentation des régions d'exercice en dimension 2



Représentation des régions d'exercice en dimension 2



Majoration de l’erreur sur les frontières libres

Proposition :

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in [0, +\infty[^d$, on a :

$$0 \leq P(T, x) - P^n(T, x) \leq Ch.$$

Majoration de l'erreur sur les frontières libres

Proposition :

Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in [0, +\infty[^d$, on a :

$$0 \leq P(T, x) - P^n(T, x) \leq Ch.$$

Théorème :

Soit $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$ normé. Il existe une constante $C_{T,\varepsilon} > 0$ telle que

$$0 \leq s^n(T, \varepsilon) - s(T, \varepsilon) \leq C_{T,\varepsilon}\sqrt{h},$$

lorsque $h = T/n$ est suffisamment petit.

Le cas unidimensionnel : $d = 1$ et $\alpha = 1$

Sur l'ouvert $]s(T), s^n(T)[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(T,\xi) &= rP(T,\xi) - (r-\delta)\xi\frac{\partial P}{\partial x}(T,\xi) + \frac{\partial P}{\partial t}(T,\xi) \\
&\geq rP(T,\xi) - (r-\delta)\xi\frac{\partial P}{\partial x}(T,\xi) \\
&\geq r(K-\xi) - (\delta - r)^+\xi \\
&\geq rK - \min\{\delta, r\}s^n(T).
\end{aligned}$$

Le cas unidimensionnel : $d = 1$ et $\alpha = 1$

Sur l'ouvert $]s(T), s^n(T)[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(T,\xi) &= rP(T,\xi) - (r-\delta)\xi\frac{\partial P}{\partial x}(T,\xi) + \frac{\partial P}{\partial t}(T,\xi) \\
&\geq rP(T,\xi) - (r-\delta)\xi\frac{\partial P}{\partial x}(T,\xi) \\
&\geq r(K-\xi) - (\delta - r)^+\xi \\
&\geq rK - \min\{\delta, r\}s^n(T).
\end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C_1 > 0$ telle que $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(T,\xi) \geq C_1$.

Le cas unidimensionnel : $d = 1$ et $\alpha = 1$

Sur l'ouvert $]s(T), s^n(T)[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(T,\xi) &= rP(T,\xi) - (r-\delta)\xi\frac{\partial P}{\partial x}(T,\xi) + \frac{\partial P}{\partial t}(T,\xi) \\
&\geq rP(T,\xi) - (r-\delta)\xi\frac{\partial P}{\partial x}(T,\xi) \\
&\geq r(K-\xi) - (\delta - r)^+\xi \\
&\geq rK - \min\{\delta, r\}s^n(T).
\end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C_1 > 0$ telle que $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(T,\xi) \geq C_1$.
On intègre entre $s(T)$ et $s^n(T)$ et on obtient :

$$\frac{C_1}{2}\left(s^n(T) - s(T)\right)^2 \leq P(T, s^n(T)) - f(s^n(T)) \leq Ch.$$

Un principe du maximum

Théorème :

Soit D un domaine borné de $]0,T[\times\mathbb{R}^d$.

On note δD la frontière de D et on définit sa frontière parabolique :

$$\delta_p D = \delta D - \{(t,x) \in \delta D :\ t = T\}.$$

Soit u une fonction définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, continue sur $\bar{D}$, telle que

$$u \in \mathcal{C}^{1,2}(D), \quad \mathcal{M}u \geq 0 \text{ sur } D \quad \text{et} \quad u \leq 0 \text{ sur } \delta_p D.$$

On a alors $u \leq 0$ sur D.

Le cas multidimensionnel

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $b > 0$ tel que

$$s(T, \varepsilon) < s^n(T, \varepsilon) - b\sqrt{h}.$$

On veut montrer qu'il existe $\lambda \in [s(T, \varepsilon), s^n(T, \varepsilon) - b\sqrt{h}]$ tel que

$$0 \geq [P - f] (T, \lambda\varepsilon) .$$

Le cas multidimensionnel

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $b > 0$ tel que

$$s(T, \varepsilon) < s^n(T, \varepsilon) - b\sqrt{h}.$$

On veut montrer qu'il existe $\lambda \in \left[s(T,\varepsilon), s^n(T,\varepsilon) - b\sqrt{h}\right]$ tel que

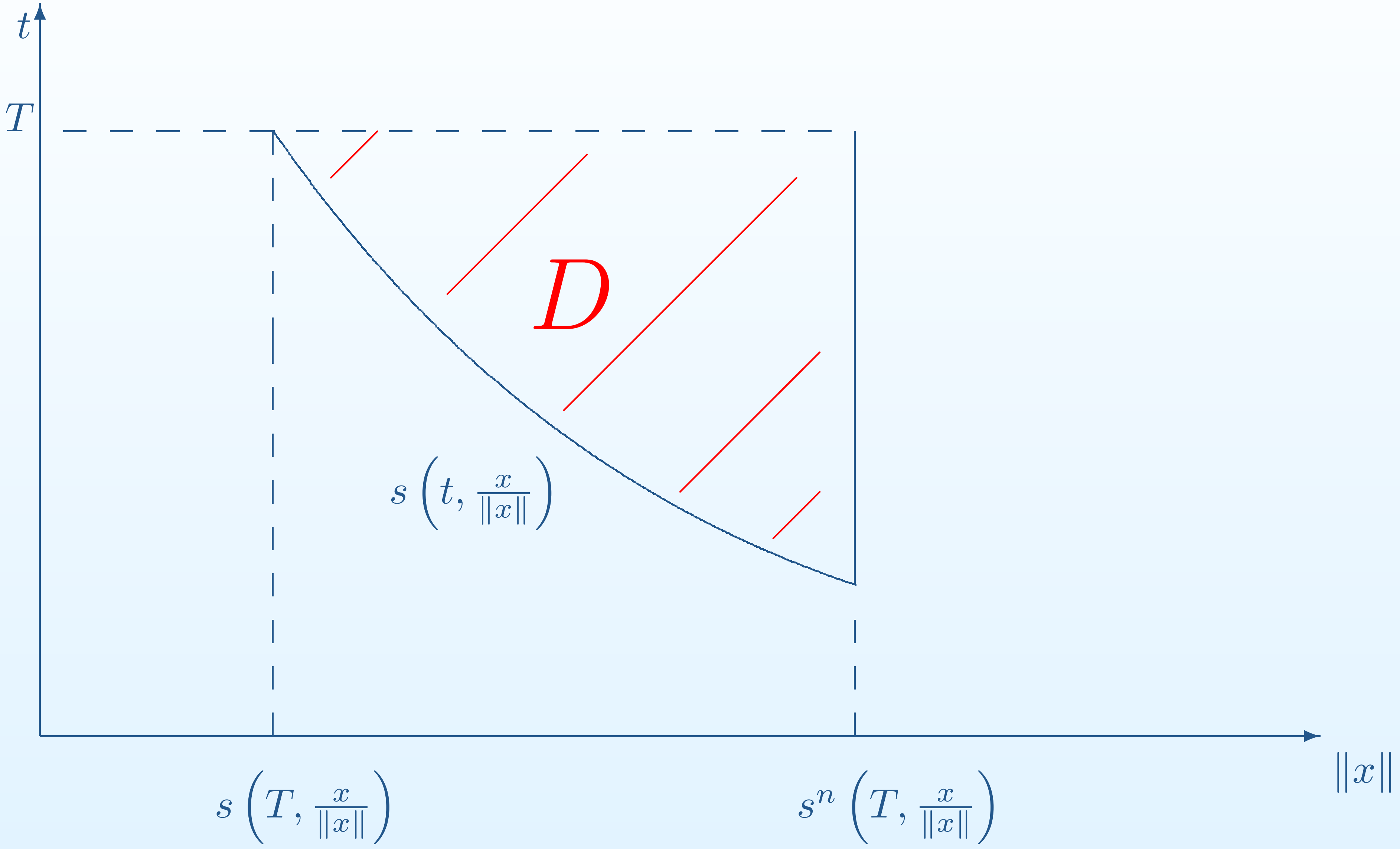
$$0 \geq \left[P - f\right](T, \lambda\varepsilon)\,.$$

Nous appliquons le principe du maximum sur le domaine suivant :

$$D = \left\{(t,x) \in]0,T[\times]0,+\infty[^d\colon\ s\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right) < \|x\| < s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right)\right\} \bigcap V_\varepsilon,$$

où $V_\varepsilon = \left\{(t,x) \in]0,T[\times]0,+\infty[^d\colon\ \|x - s(T,\varepsilon)\varepsilon\| < \eta\sqrt{h}\right\}.$

Représentation de D



Le cas multidimensionnel

Sur $\delta_p D$, on a

$$[P-f](t,x) \leq \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \|x\| = s\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right) \text{ ou } t=0 \\ Ch \quad \text{si} \quad \|x\| = s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right) \text{ ou } \|x - s(T,\varepsilon)\varepsilon\| = \eta\sqrt{h}. \end{cases}$$

Le cas multidimensionnel

Sur $\delta_p D$, on a

$$[P-f](t,x) \leq \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \|x\| = s\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right) \text{ ou } t = 0 \\ Ch \quad \text{si} \quad \|x\| = s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right) \text{ ou } \|x - s(T,\varepsilon)\varepsilon\| = \eta\sqrt{h}. \end{cases}$$

On introduit la fonction suivante

$$\beta(x) = \frac{a}{\sqrt{h}}\left(\left(\|x\| - s^n(T,\varepsilon) + b\sqrt{h}\right)^+\right)^3 + \frac{c}{\sqrt{h}}\left(\left(\|x - s(T,\varepsilon)\varepsilon\| - \frac{\eta}{2}\sqrt{h}\right)^+\right)$$

Le cas multidimensionnel

Sur $\delta_p D$, on a

$$[P-f](t,x) \leq \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \|x\| = s\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right) \text{ ou } t = 0 \\ Ch \quad \text{si} \quad \|x\| = s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right) \text{ ou } \|x - s(T,\varepsilon)\varepsilon\| = \eta\sqrt{h}. \end{cases}$$

On introduit la fonction suivante

$$\beta(x) = \frac{a}{\sqrt{h}} \left(\left(\|x\| - s^n(T,\varepsilon) + b\sqrt{h} \right)^+ \right)^3 + \frac{c}{\sqrt{h}} \left(\left(\|x - s(T,\varepsilon)\varepsilon\| - \frac{\eta}{2}\sqrt{h} \right)^+ \right)$$

On choisit les constantes a, b, c et η pour que

$$P - f - \beta \leq 0 \quad \text{sur} \quad \delta_p D$$

$$\mathcal{M}[P - f - \beta] = -\mathcal{M}[f - \beta] \geq 0 \quad \text{sur} \quad D.$$

Limite de la frontière libre à l'échéance

Théorème : (S. Villeneuve 1999)
On pose $\alpha\delta = (\alpha_i \delta_i)_{1 \leq i \leq d}$ et on a

$$\bigcup_{0<t\leq T} \mathcal{E}_t = \{x \in [0, +\infty[^d\colon \langle \alpha, x\rangle < K \text{ et } \langle \alpha\delta, x\rangle < rK\}.$$

Limite de la frontière libre à l'échéance

Théorème : (S. Villeneuve 1999)
On pose $\alpha\delta = (\alpha_i \delta_i)_{1 \leq i \leq d}$ et on a

$$\bigcup_{0<t\leq T} \mathcal{E}_t = \{x \in [0, +\infty[^d : \langle \alpha, x \rangle < K \text{ et } \langle \alpha\delta, x \rangle < rK\}.$$

Corollaire : Soit $\epsilon \in [0, +\infty[^d$ normé, on a :

$$s_\epsilon := \lim_{t \to 0} s(t, \epsilon) = \min\{\left[\frac{K}{\langle \alpha, \epsilon \rangle}\right]^+, \left[\frac{rK}{\langle \alpha\delta, \epsilon \rangle}\right]^+\},$$

avec la notation suivante :

$$[x]^+ = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comportement de la frontière libre à l'échéance

Théorème : Soit $\epsilon \in [0, +\infty[^d$ normé.

- Si $r\langle \alpha, \epsilon \rangle^+ < \langle \alpha\delta, \epsilon \rangle$, il existe $C > 0$ telle que :

$$s_\epsilon - s(t, \epsilon) \overset{t \to 0}{\sim} C\sigma_\epsilon s_\epsilon \sqrt{t},$$

avec $\sigma_\epsilon = \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sigma_{i,j} \alpha_i \delta_i \epsilon_i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Comportement de la frontière libre à l'échéance

Théorème : Soit $\epsilon \in [0, +\infty[^d$ normé.

- Si $r\langle \alpha, \epsilon\rangle^+ < \langle \alpha\delta, \epsilon\rangle$, il existe $C > 0$ telle que :

$$s_\epsilon - s(t,\epsilon) \overset{t \to 0}{\sim} C\sigma_\epsilon s_\epsilon \sqrt{t},$$

avec $\sigma_\epsilon = \left(\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n \sigma_{i,j}\alpha_i\delta_i\epsilon_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

- Si $\langle \alpha\delta, \epsilon\rangle^+ < r\langle \alpha, \epsilon\rangle$, on a

$$s_\epsilon - s(t,\epsilon) \overset{t \to 0}{\sim} \tilde{\sigma}_\epsilon s_\epsilon \sqrt{t \ln(\frac{1}{t})},$$

avec $\tilde{\sigma}_\epsilon = \left(\sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i \sigma_{i,j}\epsilon_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Illustration en dimension 2.

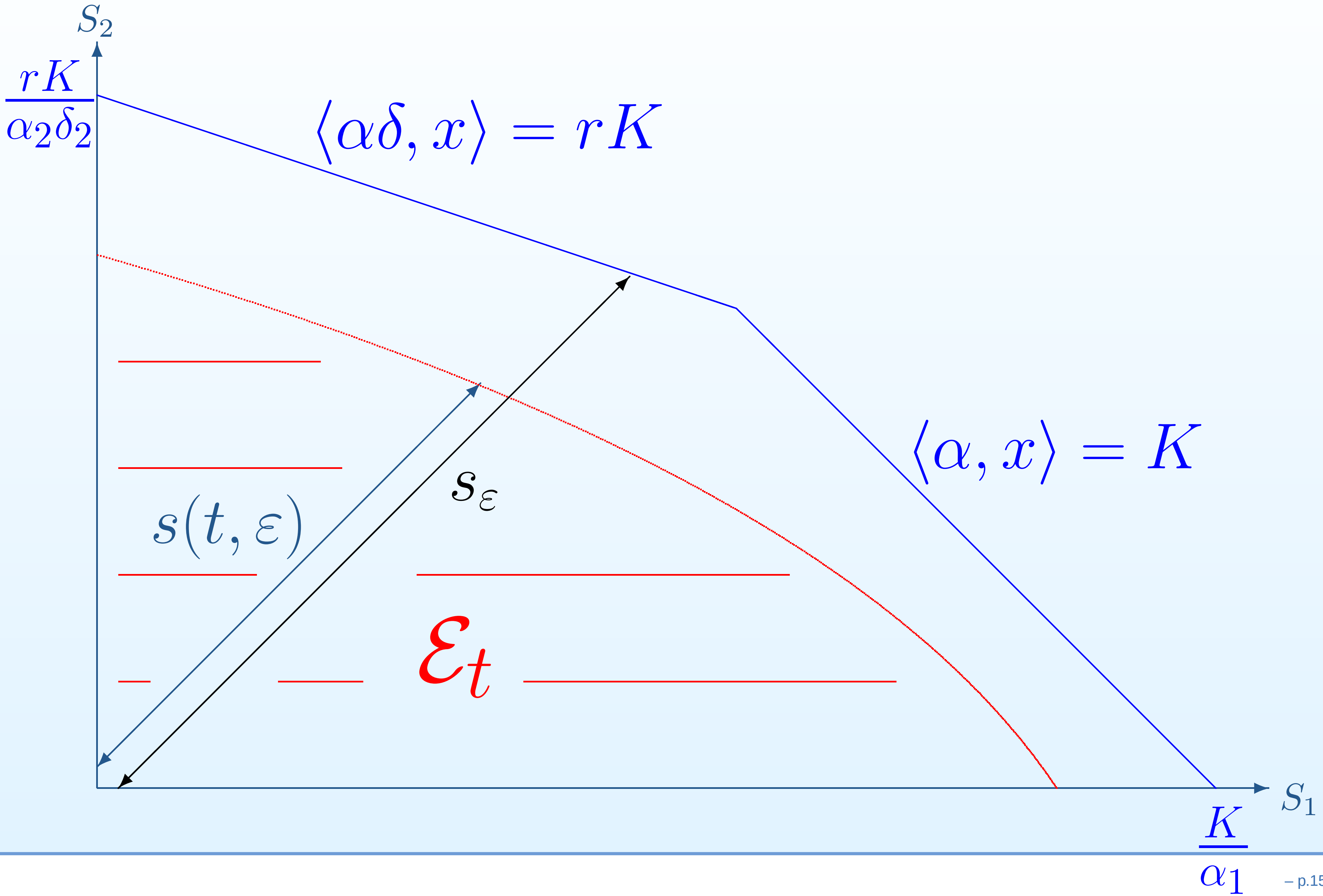


Illustration en dimension 2.